

مدرسة مصر الخير الإعدادية لجهينة - سوهاج

الترم
الثاني

الصف الثالث الإعدادي

٢٠٢٠

إهداء إلى الطالبة



ملزمة
الجبر والإحصاء



إعداد وتصميم

محمود عوض حسن

معلم أول رياضيات

انت أقوى من الجبر

الفهرس

◆ الوحدة الأولى : المعادلات

- مراجعة على التحليل ص ١
- حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين ص ٢
- حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد ص ٥
- حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية ص ٨
- الحل البياني للمعادلات ص ١١
- أسئلة اختر على الوحدة الأولى ص ١٢

◆ الوحدة الثانية : الكسور الجبرية

- أصفار الدالة ص ١٤
- مجال الدالة الكسرية ص ١٥
- اختزال الكسر الجبري ص ١٧
- تساوي كسرين جبريين ص ١٨
- جمع وطرح الكسور الجبرية ص ٢٠
- ضرب وقسمة الكسور الجبرية ص ٢٣
- المعكوس الضربي للكسر الجبري ص ٢٧
- أسئلة اختر على الوحدة الثانية ص ٢٨

◆ الوحدة الثالثة : الإحصاء

- الاحتمال ص ٣٠
- أسئلة اختر على الإحصاء ص ٣٥
- أسئلة اختر تراكمي ص ٣٦

مراجعة على التحليل

التحليل بإخراج العامل المشترك

تقنية
معلم اول رياضيات

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - 6 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^2 - س^2 &= س (س - س) \\ \blacklozenge س^3 - س^3 &= س (س^2 - س^2) \\ \blacklozenge س^2 + س^2 &= س (س + س) \\ \blacklozenge س^2 - س^2 &= س (س - س) \\ \blacklozenge س^2 + س^2 &= س (س + س) \\ \blacklozenge س^2 - س^2 &= س (س - س) \\ \blacklozenge س^2 - س^2 &= س (س - س) \end{aligned}$$

أعداد لها جذور تربيعية مثل:

٤٩ ، ٣٦ ، ٢٥ ، ١٦ ، ٩ ، ٤ ، ١

الفرق بين مربعين

هو عبارة عن حدين لهما جذور تربيعية وبينهم (-) مثل : $س^2 - ٢٥$ ولو لقيت بينهم (+) ملوش تحليل

تحليل الفرق بين مربعين = $(\sqrt{\text{الأول}} - \sqrt{\text{الثاني}}) (\sqrt{\text{الأول}} + \sqrt{\text{الثاني}})$

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^2 - ٩ \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - ١٦ \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - ٣٦ \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - ٢٥ \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^2 - س^2 &= (س - ٣) (س + ٣) \\ \blacklozenge س^2 - س^2 &= (س - ٤) (س + ٤) \\ \blacklozenge س^2 - س^2 &= (س - ٦) (س + ٦) \\ \blacklozenge س^2 - س^2 &= (س - ٥) (س + ٥) \end{aligned}$$

الأعداد التي لها جذور تكعيبية مثل:

١٢٥ ، ٦٤ ، ٢٧ ، ٨ ، ١

مجموع مكعبين والفرق بينهما

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^3 - ٢٧ \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^3 + ٨ \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^3 - س^3 &= (س - ٣) (س^2 + س + ٩) \\ \blacklozenge س^3 + س^3 &= (س + ٢) (س^2 - س + ٤) \end{aligned}$$

تحليل المقدار الثلاثي البسيط $س^2 + ب س + ج$

قاعدة الإشارات: إذا كانت إشارة الأخير (+) يبقى الإشارتين زى إشارة الأوسط
إذا كانت إشارة الأخير (-) يبقى الإشارتين مختلفتين والرقم الأكبر ياخذ إشارة الأوسط

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^2 + س + ٤ \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س + ٩ \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 + س - ٦ \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س - ١ \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^2 + س + ٤ &= (س + ٢) (س + ٢) \\ \blacklozenge س^2 - س + ٩ &= (س - ٣) (س - ٣) \\ \blacklozenge س^2 + س - ٦ &= (س + ٣) (س - ٢) \\ \blacklozenge س^2 - س - ١ &= (س - ٥) (س + ٣) \end{aligned}$$

الحل: $ص - ٤ = س$ بالتعويض في الثانية $٥ = س + ٢ (س - ٤)$ $س + ٢ = ٨ + س$ $٥ = س$
 $س - ٣ = ص$ بالتعويض في الأولى $٣ = س$ $١ = ص - ٤ = ٣ - ٤$ $١ = ص$ $ص = ١$ $س = ٣$ $ج.م = \{ (١, ٣) \}$

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$$2س - ص = 3 \quad , \quad 3س + 2ص = 4$$

الحل

بضرب المعادلة الأولى $\times 2$

$$\begin{array}{r} 2س - ص = 3 \\ 4س + 2ص = 8 \\ \hline 10س = 11 \end{array}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية $2س = 3$:

$$2س + 2ص = 4 \Rightarrow 2ص = 4 - 2س \Rightarrow 2ص = 4 - 3 = 1 \Rightarrow ص = \frac{1}{2}$$

$$2س - \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow 2س = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow س = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$$3س + 2ص = 4 \quad , \quad 2س - ص = 2$$

الحل

نظبط شكل المعادلة الثانية : $2س - ص = 2$ بضرب المعادلة الثانية $\times 3$

$$\begin{array}{r} 3س - 3ص = 6 \\ 3س + 2ص = 4 \\ \hline 10ص = -2 \end{array}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية $3س = 2$:

$$3س - 3ص = 6 \Rightarrow 3ص = 3س - 6 \Rightarrow 3ص = 2 - 6 = -4 \Rightarrow ص = -\frac{4}{3}$$

$$3س + 2\left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \Rightarrow 3س - \frac{8}{3} = 4 \Rightarrow 3س = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow س = \frac{20}{9}$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ \left(\frac{20}{9}, -\frac{4}{3} \right) \right\}$$

ملحوظة
بجانبه

ما تطرح إطح الرقمين بإشارتهما : يعنى مثلا في مثال ٢ هتقول : ٦ - ٤
نفس الكلام في الجمع ، خلاصة الكلام اتعامل مع الأرقام بإشاراتها

أوجد قيمتي أ، ب علما بأن (٣، ١) حلا للمعادلتين :

$$3س + 2ص = 17 \quad , \quad 2س - ص = 5$$

الحل

حل للمعادلة أ $3س + 2ص = 17$:نعوض عن س $3 = 17 - 2ص$ ، $1 = 3$

$$3(17 - 2ص) + 2ص = 5 \Rightarrow 51 - 6ص + 2ص = 5 \Rightarrow -4ص = 5 - 51 = -46 \Rightarrow ص = \frac{46}{4} = \frac{23}{2}$$

حل للمعادلة ٣ $2س - ص = 5$:نعوض عن س $3 = 5 - ص$ ، $1 = 3$

$$2(5 - ص) - ص = 17 \Rightarrow 10 - 2ص - ص = 17 \Rightarrow -3ص = 17 - 10 = 7 \Rightarrow ص = -\frac{7}{3}$$

$$\begin{array}{r} 17 = 3س + 2\left(-\frac{7}{3}\right) \\ 17 = 3س - \frac{14}{3} \\ \hline 17 + \frac{14}{3} = 3س \\ \frac{65}{3} = 3س \end{array}$$

بالتعويض في ١ $2س = 5$:

$$2س = 5 \Rightarrow س = \frac{5}{2}$$

$$3\left(\frac{5}{2}\right) + 2ص = 17 \Rightarrow \frac{15}{2} + 2ص = 17 \Rightarrow 2ص = 17 - \frac{15}{2} = \frac{34 - 15}{2} = \frac{19}{2} \Rightarrow ص = \frac{19}{4}$$

مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ،

فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم فأوجد مساحته.

الحل

نفرض أن الطول = س والعرض = ص

الطول يزيد عن العرض : \therefore الطول - العرض = الزيادة

$$س - ص = 4$$

المحيط = ٢٨ ، \therefore محيط المستطيل = $2(س + ص)$

$$2(س + ص) = 28 \Rightarrow س + ص = 14$$

$$س + ص = 14$$

$$\begin{array}{r} س - ص = 4 \\ س + ص = 14 \\ \hline 2س = 18 \end{array}$$

$$2س = 18 \Rightarrow س = 9$$

بالتعويض في $س - ص = 4$

$$9 - ص = 4 \Rightarrow ص = 5$$

$$\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض} = 9 \times 5 = 45 \text{ سم}^2$$



٢ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$٣س + ٤ص = ١١ ، ٢س + ص = ٤ = ٠$$

الحل

١ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$س + ٣ص = ٧ ، ٥س - ص = ٣$$

الحل

٤ زاويتان حادثان في مثلث قائم الزاوية
الفرق بين قياسيهما ٥٠ ، أوجد قياسيهما

الحل

٣ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$ص = ١ - ٢س ، ٢ص + س = ٥$$

الحل

جرب حلها بالطريقتين (الحذف والتعويض)



حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

إذا كانت المعادلة على الصورة : $أس^2 + ب س + ج = ٠$ هنستخدم القانون العام:

القانون العام



$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ ج}}{٢ أ}$$



أ : معامل $س^2$
ب : معامل $س$
ج : الحد المطلق

خطوات حل المعادلة:

١ خلى المعادلة على الصورة $أس + ب ص + ج = صفر$ (وديهم كلهم قبل يساوى)

يعنى لو كانت كده : $س^2 + ٣س + ٢ = ٠$ خليها كده : $س^2 - ٥س - ٣ = ٠$

٢ خذ من المعادلة قيم أ ، ب ، ج بإشارتهم الموجودة في المعادلة

يعنى لو المعادلة كده $س^2 - ٥س - ٣ = ٠$ يبقى أ = ١ ، ب = -٥ ، ج = -٣

٣ عوض في القانون العام عن قيم أ ، ب ، ج واحسب اللي تحت الجذر لحد ما يبقى رقم واحد بس

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣^2 - ٤(-٥)(-٣)}}{٢ \times ١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٦٠}}{٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-٥١}}{٢}$$

٤ افصل الناتج مرة بال (+) ومرة بال (-) واحسب القيمتين بالآلة الحاسبة

$$س = \frac{-٣ + \sqrt{-٥١}}{٢} = ٢,٥٤١ \quad و \quad س = \frac{-٣ - \sqrt{-٥١}}{٢} = -٠,٥٤١$$

٥ اكتب الناجين في مجموعة الحل

$$س = \{ ٢,٥٤١ , -٠,٥٤١ \}$$



ملاحظات

ملحوظة ١ : شايف - ب اللي فوق في القانون؟ دى معناها انك تعوض عن ب بس بإشارة مختلفة

ملحوظة ٢ : شايف ٢ اللي في المقام؟ شايفها؟ لا دى مفياهاش حاجة ، كويس انك شايفها

ملحوظة ٣ : إذا كان المميز $ب^2 - ٤ أ ج < صفر$ (موجب) فإن المعادلة لها جذران

وإذا كان $ب^2 - ٤ أ ج > صفر$ (سالب) فإن المعادلة ليس لها حلول ، أي م . ح = \emptyset

وإذا كان $ب^2 - ٤ أ ج = صفر$ فإن المعادلة لها جذر واحد (أو جذران متساويان)

أمثلة محلولة

١ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل

المعادلة الآتية في ح : $س^2 - ٣س + ٥ = ١$
مقرَّبًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل

$$\begin{aligned} ٣ &= أ \\ ٥ &= ب \\ ١ &= ج \end{aligned}$$



$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{١ \times ٣ \times ٤ - ٣ \times ٢}}{٣ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{١٢ - ٢٥}}{٦} = \frac{-٥ \pm \sqrt{-١٣}}{٦}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

$$س \approx ٠,٢٣ \quad \text{أو} \quad س \approx ١,٤٣$$

$$ح.م. = \{ ٠,٢٣ , ١,٤٣ \}$$

٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة

$س^2 - ٤س + ١ = ٠$ مقرَّبًا الناتج لرقمين عشريين

الحل

$$\begin{aligned} ١ &= أ \\ ٤ &= ب \\ ١ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١ \times ٤ \times ٤ - ١ \times ٢}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤}}{٢} = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$$

$$س \approx ٠,٢٧ \quad \text{أو} \quad س \approx ٣,٧٣$$

$$ح.م. = \{ ٠,٢٧ , ٣,٧٣ \}$$

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة (س - ٣)س = ٥ مقرَّبًا الناتج لرقمين عشريين

الحل



الأول لازم ن فك القوس

$$س^2 - ٣س = ٥$$

$$س^2 - ٣س - ٥ = ٠$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ \times ١ \times ٤ - ١ \times ١}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣٦ - ١٢١}}{٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٨٥}}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

$$س \approx ٠,٨٩ \quad \text{أو} \quad س \approx ١٠,١١$$

$$ح.م. = \{ ٠,٨٩ , ١٠,١١ \}$$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة س (س - ١) = ٤ باستخدام القانون العام مقرَّبًا الناتج لثلاثة أرقام

الحل

الأول لازم نضرب الـ س في القوس

$$س^2 - س = ٤$$

$$\begin{aligned} ١ &= أ \\ ١ &= ب \\ ٤ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ \times ١ \times ٤ - ١ \times ٢}}{١ \times ٢}$$



$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٢}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{-١}}{٢}$$

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١٧}}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

$$س \approx ١,٥٦٢ \quad \text{أو} \quad س \approx ٢,٥٦٢$$

$$ح.م. = \{ ١,٥٦٢ , ٢,٥٦٢ \}$$

حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية



نصه
معلم اول رياضيات
يتم

- * ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى وهات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص
- * عوض في معادلة الدرجة الثانية عن القيمة التي انت جبتها
- * فك الأقواس
- * جمع المتشابه (وخلي المعادلة = 0)
- * التحليل (ولو لقيت رقم عامل مشترك اقسم عليه قبل التحليل)
- * إما - أو (وهات قيمتين للمجهول)
- * عوض عن القيمتين في معادلة الدرجة الأولى وهات قيمتين للمجهول الثاني



نوريب على فك الأقواس

$$\text{نوريب على فك الأقواس} \quad (س + 3)^2 = \text{مربع الأول} \pm \text{الأول} \times \text{الثاني} \times 2 + \text{مربع الثاني} = س^2 + 6س + 9$$

إشارة القوس

$$\dots\dots\dots = (س + 4)^2 \quad \leftarrow \quad \dots\dots\dots = (س - 1)^2 \quad \leftarrow$$

$$\text{نوريب على فك الأقواس} \quad س(س + 3) = س^2 + 3س \quad \text{نوريب على فك الأقواس} \quad س(س - 3) = س^2 - 3س$$

$$\dots\dots\dots = س(س - 5) \quad \leftarrow \quad \dots\dots\dots = س(س + 1) \quad \leftarrow$$

نوريب على جمع المتشابه

$$\dots\dots\dots = 1 + 2ص + ص^2 - 25 = 1 + 2ص + ص^2 - 25$$

$$\dots\dots\dots = 1 + 4ص + 4ص^2 - 25 = 1 + 4ص + 4ص^2 - 25$$

$$\dots\dots\dots = 100 + 20ص + 4ص^2 - 100 = 100 + 20ص + 4ص^2 - 100$$

$$\dots\dots\dots = 9 + 6س + س^2 - 13 = 9 + 6س + س^2 - 13$$

$$\dots\dots\dots = 1 + 2ص + ص^2 = 1 + 2ص + ص^2$$

ملحوظة : س ص = 9 هي معادلة من الدرجة الثانية وليست من الدرجة الأولى

١ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :
 $س - ص = ١$ ، $س + ٢ص = ٢٥$

الحل من معادلة الدرجة الأولى : $س + ١ = ص$

بالتعويض عن $س = (١ + ص)$ في معادلة الدرجة الثانية

$٢٥ = (١ + ص) + ٢ص$ نضرب الأقواس

$٢٥ = ١ + ٣ص$ نجمع المتشابهة

$٢٤ = ٣ص$ بالقسمة على ٣

$٨ = ص$ بالتعليل

$٨ = (٣ - ص) (٤ + ص)$

$٨ = ٣ - ص$ أو

$٣ = ص$

$٨ = ٤ + ص$ إما

$٤ = ص$

بالتعويض في المعادلة $س + ١ = ص$

$٣ + ١ = س$

$٤ = س$

$٤ + ١ = س$

$٥ = س$

$\{ (٤, ٤), (٥, ٥) \} = ح.م$

٢

أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$س - ص = ٢٧$ ، $س + ٢ص = ٢٧$

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : $س = ص$

بالتعويض عن $س = ص$ في معادلة الدرجة الثانية

$٢٧ = ص + ٢ص$ نجمع المتشابهة

$٢٧ = ٣ص$ بالقسمة على ٣

$٩ = ص$ بالتعليل

$٩ = (٣ - ص) (٣ + ص)$

$٩ = ٣ - ص$ أو $٩ = ٣ + ص$ إما

$٣ = ص$ $٦ = ص$

بالتعويض في المعادلة $س - ص = ٢٧$

$٣ - ٣ = ٢٧$ $٦ - ٦ = ٢٧$

$٠ = ٢٧$ $٠ = ٢٧$

$\{ (٣, ٣), (٦, ٦) \} = ح.م$

٣

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$س - ٢ص = ١$ ، $س + ٢ص = ٥٢$

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : $س = ١ + ٢ص$

بالتعويض عن $س = (١ + ٢ص)$ في معادلة الدرجة الثانية

$٥٢ = (١ + ٢ص) + ٢ص$ نضرب الأقواس

$٥٢ = ١ + ٤ص$ نجمع المتشابهة

$٥١ = ٤ص$ بالقسمة على ٤

$١٢.٥ = ص$ بالتعليل

$١٢.٥ = ١ + ٢ص$ أو

$١١.٥ = ٢ص$

$١٢.٥ = ١ + ٢ص$ إما

$١١.٥ = ٢ص$

بالتعويض في المعادلة $س + ٢ص = ٥٢$

$١٢.٥ + ٢(١٢.٥) = ٥٢$

$١٢.٥ + ٢٥ = ٥٢$

$١٢.٥ + ٢(١٢.٥) = ٥٢$

$١٢.٥ + ٢٥ = ٥٢$

$\{ (١٢.٥, ١٢.٥), (١١.٥, ١١.٥) \} = ح.م$

٤

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$س - ٢ص = ١٠$ ، $س + ٢ص = ٥٢$

الحل

من معادلة الدرجة الأولى : $س = ١٠ + ٢ص$

بالتعويض عن $س = (١٠ + ٢ص)$ في معادلة الدرجة الثانية

$٥٢ = (١٠ + ٢ص) + ٢ص$ نضرب الأقواس

$٥٢ = ١٠ + ٤ص$ نجمع المتشابهة

$٤٢ = ٤ص$ بالقسمة على ٤

$١٠.٥ = ص$ بالتعليل

$١٠.٥ = (٢ - ص) (١٢ + ص)$

$١٠.٥ = ٢ - ص$ أو $١٠.٥ = ١٢ + ص$ إما

$٢ = ص$ $١٢.٥ = ص$

بالتعويض في المعادلة $س + ٢ص = ٥٢$

$٢ + ٢(١٠.٥) = ٥٢$ $١٢.٥ + ٢(١٠.٥) = ٥٢$

$٢ + ٢١ = ٥٢$ $١٢.٥ + ٢١ = ٥٢$

$\{ (٢, ١٠.٥), (١٢.٥, ١٠.٥) \} = ح.م$

١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

$$\text{ص} - \text{س} = 3, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 13$$

الحل

من معادلة الدرجة الأولى :
بالتعويض في معادلة الدرجة الثانية

..... ∴

..... ∴

نفس الأقواس

..... ∴

نجمع المتشابه

بالتحليل ∴

..... ∴

إما	أو
..... ∴ ∴

بالتعويض في ∴

..... ∴ ∴
---------	---------

$$\therefore \text{م. ح} = \{ (-1, 4), (1, 4) \}$$

٢ مستطيل محيطه ١٤ سم ومساحته ١٢ سم^٢

أوجد كلا من بعديه

الحل

نفرض أن بُعدا المستطيل هما س ، ص

$$\therefore \text{محيط المستطيل} = 2(\text{الطول} + \text{العرض})$$

$$\therefore 14 = 2(\text{س} + \text{ص}) \quad \text{بالقسمة على ٢}$$

$$\text{س} + \text{ص} = 7 \quad \text{ومنها} \quad \text{ص} = 7 - \text{س}$$

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض} \quad \therefore \text{س} \text{ص} = 12$$

$$\text{بالتعويض عن} \quad \text{ص} = 7 - \text{س} \quad \text{في المعادلة} \quad \text{س} \text{ص} = 12$$

$$\therefore \text{س} (7 - \text{س}) = 12 \quad 7\text{س} - \text{س}^2 = 12$$

$$7\text{س} - \text{س}^2 - 12 = 0 \quad \text{نرتب ونغير إشارة الكل}$$

$$\text{س}^2 - 7\text{س} + 12 = 0 \quad \text{س}^2 - 4\text{س} - 3\text{س} + 12 = 0$$

$$\text{إما} \quad \text{س} = 4 \quad \therefore \text{ص} = 7 - 4 = 3$$

$$\text{أو} \quad \text{س} = 3 \quad \therefore \text{ص} = 7 - 3 = 4$$

∴ بعدا المستطيل هما ٣ سم ، ٤ سم

٣ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

$$\text{ص} - \text{س} = 2, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 4$$

الحل

٤ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

$$\text{س} + \text{ص} = 5, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 15$$

الحل

الحل البياني للمعادلات

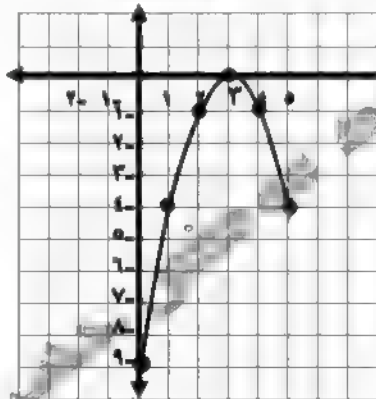
ارسم الشكل البياني للدالة

٢

د(س) = س^٢ - س - ٩ في الفترة [٥ ، ٠]
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	٩	٤	١	٠	١	٤



ح.م = { ٣ }

ارسم الشكل البياني للدالة : د(س) = س^٢ - ١

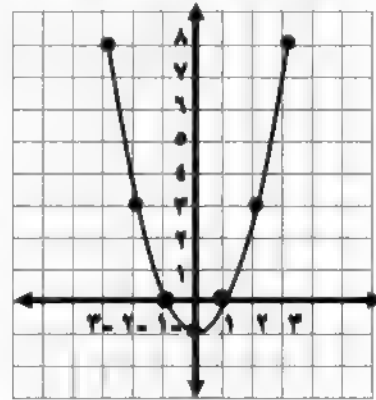
١

في الفترة [-٣ ، ٣]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^٢ - ١ = ٠

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٨	٣	٠	١	٠	٣	٨



ح.م = { -١ ، ١ }

نفس خطوات تمثيل الدالة التربيعية

نص محمود عوض
معلم اول رياضيات

ملاحظات على الحل البياني

◆ مجموعة حل معادلة من الدرجة الثانية بيانيا هي :

قيم س التي يقطعها المنحنى من محور السينات

◆ إذا لم يقطع المنحنى محور السينات فإن ح.م = ∅

◆ مجموعة حل معادلتين من الدرجة الأولى بيانيا هي :

نقطة تقاطع المستقيمين

◆ إذا توازى المستقيمان فإن ح.م = ∅

◆ إذا انطبق المستقيمان فإن مجموعة الحل هي :

{ (س ، ص) : واكتب أي معادلة من الاثنين }

أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

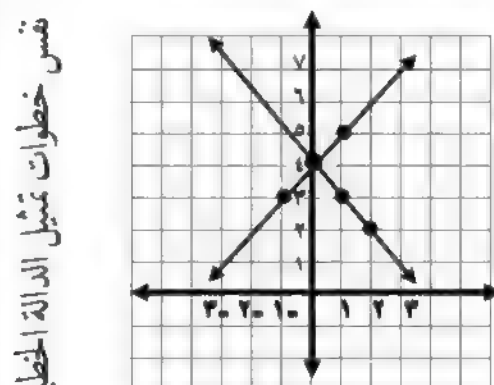
٣

ص = س + ٤ ، س + ٤ = ص

الحل

ص = س + ٤ ، ص - ٤ = س

س	-١	٠	١	٢
ص	٣	٤	٥	٦



ح.م = { (-٤ ، ٠) }

نفس خطوات تمثيل الدالة الخطية

نص محمود عوض
معلم اول رياضيات

الواجب المنزلي

الدرس الأول: حل معادلتين من الدرجة الأولى

- ١ أوجد في ح' مجموعة حل المعادلتين $س + ٢ص = ٨$ ، $٣س + ص = ٩$
- ٢ أوجد في ح' $ح \times ح$ مجموعة حل المعادلتين $٢س + ص = ١$ ، $س + ٢ص = ٥$
- ٣ أوجد في ح' $ح \times ح$ مجموعة حل المعادلتين $س = ص + ٤$ ، $٣س + ٢ص = ٧$
- ٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان محيطه ٢٢ سم فأوجد مساحته.
- ٥ أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلتين $ص = ٢س - ٣$ ، $س + ٢ص = ٤$

الدرس الثاني: القانون العام

- ١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة $س' - ٢س - ٦ = ٠$ مقربا الناتج لرقم عشري واحد.
- ٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة $٣س' - ٦س + ٦ = ٠$ مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية
- ٣ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث $د(س) = س' - ٢س - ٤$ في الفترة $[-٢ ، ٤]$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $س' - ٢س - ٤ = ٠$

الدرس الثالث: حل معادلتين إحداها من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية

- ١ أوجد في ح' $ح \times ح$ مجموعة حل المعادلتين $س - ص = ٢$ ، $س' + ص' = ٢٠$
- ٢ أوجد في ح' $ح \times ح$ مجموعة حل المعادلتين $س + ٢ص = ٤$ ، $س' + ص + ص' = ٧$
- ٣ عددان مجموعهما ٩٠ وحاصل ضربيهما ٢٠٠٠ أوجد العددين
- ٤ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^٢ أوجد محيطه.
- ٥ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوي ٣٠ سم أوجد طولى ضلعي القائمة



أصفار الدالة



* لإيجاد أصفار الدالة نساوى الدالة بالصفر ونحل المعادلة

مثال: إذا كانت د (س) = $س^2 - 9$ فإوجد أصفار الدالة
الحل: $س^2 - 9 = 0$ ∴ $س^2 = 9$ ∴ $س = \pm 3$ ∴ ص (د) = { 3, -3 }

* لو كانت د (س) = صفر فإن ص (د) = ح

* أصفار الكسر الجبرى = أصفار البسط - أصفار المقام
(يعنى الذى موجود فى أصفار البسط ومش متكرر فى أصفار المقام)

الدوال التى أصفارها Φ

* (س + عفرىة) ملوش أصفار: زى $س^2 + 4$ أو $س^2 + 3$ وهكذا $\Phi = \text{ص (د)}$

* فى مجموع المكعبين والفرق بينهما: القوس الكبفر ملوش أصفار $\Phi = \text{ص (د)}$

* لو كانت د (س) = أى عدد (ما عدا الصفر) زى د (س) = 3 فإن $\Phi = \text{ص (د)}$

تدريب: أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتفة:

١ د (س) = $س^2 - 18س$	٢ د (س) = $س^2 + 2س - 15$	٣ د (س) = $س^2 + 16$
الحل :	الحل :	الحل :
.....
ص (د) =	ص (د) =	ص (د) =

ملحوظة : لو أعطاك أصفار الدالة معلومة فى المسألة عوض بفرها فى الدالة وسأوى الدالة بالصفر

إذا كانت د (س) = $س^3 - 2س^2 - 75$
فأثبت أن العدد 5 أحد أصفار هذه الدالة

الحل بالتعويض فى الدالة عن س = 5

$$\begin{aligned} \therefore د (5) &= 5^3 - 2 \times 5^2 - 75 \\ &= 125 - 50 - 75 \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ د (5) = 0 ∴ العدد 5 أحد أصفار الدالة

إذا كانت { 3, -3 } هى مجموعة أصفار الدالة د
أوجد قيمة أ

الحل ∴ { 3, -3 } هى مجموعة أصفار الدالة

∴ أى قيمة من هذه القيم تجعل د (س) = 0

$$\therefore 0 = 3 + أ$$

$$\therefore 9 = أ \quad \therefore 0 = 1 + 9$$



دالة الكسر الجبري : يرمز لها بالرمز $\frac{د(س)}{ق(س)}$ وهي دالة على صورة $\frac{د(س)}{ق(س)}$

مثل : $\frac{س + ٥}{٣} = (س) \text{ ن}$ ، $\frac{س^٢}{٨ + س^٢} = (س) \text{ د}$ ، $\frac{س - ٣}{١٢ + س^٢} = (س) \text{ د}$

نصه
معلم اول رياضيات
يم

- ◆ مجال الكسر الجبري = ح - أصفار المقام
مثال : إذا كان $\frac{س - ١}{س - ٣} = (س) \text{ ن}$ فإن مجال $\text{ح} = \{ ٣ \}$
- ◆ المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ح - مجموعة أصفار المقامات
مثال : إذا كان $\frac{س}{س - ١} = (س) \text{ ن}$ ، $\frac{١}{س - ١} = (س) \text{ ن}$ ، $\frac{س + ٣}{(س - ٥)(س + ٧)} = (س) \text{ ن}$ فإن المجال المشترك لكل من ن ، د ، $\text{ح} = \{ ٧ ، ٥ ، ١ \}$
- ◆ ملحوظة : قبل إخراج المجال حلل المقام لو ليه تحليل .

نصه
معلم اول رياضيات
يم

تدريب ١ : عيّن مجال كل من الدوال الكسرية الآتية :

٣ $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢} = (س) \text{ ن}$ الحل

٢ $\frac{س - ٢}{س^٢} = (س) \text{ ن}$ الحل

١ $\frac{س + ٥}{٣} = (س) \text{ ن}$ الحل

المقام عدد يبقى ملوش أصفار

المجال = ح

٦ $\frac{س + ١}{س^٤ - ٩س^٢} = (س) \text{ ن}$ الحل

٥ $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤} = (س) \text{ ن}$ الحل

٤ $\frac{س + ١}{س^٤ - س} = (س) \text{ ن}$ الحل

تدريب ٢ : عيّن المجال المشترك لكل من الدوال الكسرية الآتية :

٢ $\frac{س^٣ + ١}{س^٧} = (س) \text{ ن}$ ، $\frac{س^٢ + ١}{٨١ - س^٤} = (س) \text{ ن}$ الحل

١ $\frac{س + ٥}{٢٠ + س^٩} = (س) \text{ ن}$ ، $\frac{١}{س^٢ - ١٦} = (س) \text{ ن}$ الحل

أمثلة وتدريبات على الأصفار والمجال

٢ إذا كان مجال الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$ هو $\{x \mid x \neq 3\}$ فأوجد قيمة a

الحل

∴ المجال = $\{x \mid x \neq 3\}$

∴ أصفار المقام = 3

بالتعويض عن $x = 3$ ونساوي المقام بالصفر

$$0 = 9 + 3 \times 1 - 9$$

$$0 = 9 + 13 - 9$$

$$0 = 13 - 18$$

$$18 = 13$$

$$5 = 1$$

٤ إذا كان مجال الدالة $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2}$ هو $\{x \mid x \neq 2, -2\}$ فأوجد قيمة a

الحل

٦ إذا كان مجال الدالة $f(x) = \frac{9}{x^2+4}$ هو $\{x \mid x \neq 0, 4\}$ فأوجد قيمتي a, b

∴ المجال = $\{x \mid x \neq 0, 4\}$ ∴ أصفار المقام الثاني = 4

$$4 = 1 + 4 \quad \therefore 0 = 1 + 4$$

$$\therefore \frac{9}{x^2+4} = \frac{b}{x-4} \quad \therefore \frac{9}{x^2+4} = \frac{b}{x-4}$$

$$\therefore \frac{9}{x^2+4} = \frac{b}{x-4} \quad \therefore \frac{9}{x^2+4} = \frac{b}{x-4}$$

$$\frac{9}{x^2+4} = \frac{b}{x-4} \quad \therefore \frac{9}{x^2+4} = \frac{b}{x-4}$$

١ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة $f(x) = \frac{x^2+15x+5}{x^2+15x+5}$ هي $\{0, 3\}$ فأوجد قيمة كل من a, b

$$\therefore f(3) = 0 \quad \therefore \frac{3^2+15 \cdot 3+5}{3^2+15 \cdot 3+5} = 0$$

$$3^2+15 \cdot 3+5 = 0$$

$$\therefore f(0) = 0 \quad \therefore \frac{0^2+15 \cdot 0+5}{0^2+15 \cdot 0+5} = 0$$

$$0^2+15 \cdot 0+5 = 0$$

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

$$\begin{array}{r} 3^2+15 \cdot 3+5 = 0 \\ 0^2+15 \cdot 0+5 = 0 \end{array}$$

$$\therefore 1 = 1 \quad \therefore 2 = 12$$

بالتعويض في ١ ∴ $3 = b + 5$ ∴ $5 = b$ ∴ $8 = b$

٣ إذا كانت $\{0, -3\}$ هي مجموعة أصفار الدالة $f(x) = \frac{x^2-2x+a}{x^2-2x+a}$ فأوجد قيمة a

الحل

٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة $f(x) = \frac{x-a}{x+b}$ هي $\{0\}$ ومجالها هو $\{x \mid x \neq 3\}$ فأوجد قيمتي كل من a, b

الحل

∴ أصفار الكسر الجبري = $\{0\}$

∴ أصفار البسط = $\{0\}$

$$0 = 1 - 5 \quad \therefore 0 = 1 - 5$$

∴ المجال = $\{x \mid x \neq 3\}$ ∴ أصفار المقام = $\{3\}$

$$3 = b + 3 \quad \therefore 0 = b + 3$$

اختزال الكسر الجبري



نصه
معلم اول رياضيات



تحليل البسط والمقام

تحليل

إخراج المجال = ح - أصفار المقام

مجال

حذف العوامل المتشابهة بين البسط والمقام

حذف

مفردان الاختزال والكسر الجبري

تدريب ١

$$\frac{s^3 - 1}{s^3 + s^2 + s} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل

التحليل :

المجال :

الحذف :

مثال

$$\frac{s^3 - 1}{s^3 + s^2 + s - 5} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل

$$\frac{(s-1)(s^2+s+1)}{(s-5)(s^2+s+1)} = \text{ن(س)}$$

المجال : ح - { ١ ، ٥ }

$$\frac{s+1}{s+5} = \text{ن(س)}$$

تدريب ٣

$$\frac{s^2 - 6s + 9}{s^2 - 18s + 81} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل

تدريب ٢

$$\frac{s^2 - 4}{s^2 - 8} = \text{اختصر لأبسط صورة ن(س)}$$

الحل

تساوى كسرين جبريين



إعداد / محمود عوض حسن

لوعايز تعرف هل : $n_1 = n_2$ أم لا اتبع الآتى :

- اختصر كل كسر لوحده بالخطوات الثلاثة (تحليل - مجال - حذف)
- $n_1 = n_2$ إذا تحقق شرطان معًا وهما : ① مجال n_1 = مجال n_2 ② $n_1(s) = n_2(s)$ بعد الاختصار النهائي
- لوقيت مجال n_1 = مجال n_2 بينما $n_1(s) \neq n_2(s)$ فإن $n_1 \neq n_2$
- لوقيت $n_1(s) = n_2(s)$ بينما مجال $n_1 \neq$ مجال n_2 فإن $n_1 \neq n_2$
- ولكن في حالة اختلاف المجالين يكون $n_1 = n_2$ في المجال المشترك فقط

مثال ٢

نصمعه عوض
معلم اول رياضيات

مثال ١

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه n_1 ، n_2 حيث :

$$\frac{n_1(s)}{n_2(s)} = \frac{12 + s + s^2}{4 + s + s^2} \quad \frac{n_2(s)}{n_1(s)} = \frac{3 - s - s^2}{1 + s + s^2}$$

الحل

$$\frac{n_1(s)}{n_2(s)} = \frac{12 + s + s^2}{4 + s + s^2} = \frac{(s-3)(s+4)}{(s+1)(s+4)}$$

مجال n_1 = ح - { -4 ، -1 }

$$\frac{n_2(s)}{n_1(s)} = \frac{3 - s - s^2}{1 + s + s^2}$$

$$\frac{n_2(s)}{n_1(s)} = \frac{3 - s - s^2}{1 + s + s^2} = \frac{(s-3)(s+1)}{(s+1)(s+1)}$$

مجال n_2 = ح - { -1 }

$$\frac{n_2(s)}{n_1(s)} = \frac{3 - s}{1 + s}$$

$\therefore n_1(s) = n_2(s)$ بينما مجال $n_1 \neq$ مجال n_2

$\therefore n_1 = n_2$ في المجال المشترك ح - { -4 ، -1 }

$$\text{إذا كان } n_1(s) = \frac{s^2 - 3s}{s^3 - s^2}$$

$$n_2(s) = \frac{s^3 + s^2 + s}{s^4 - s^3} \quad \text{اثبت أن: } n_1 = n_2$$

الحل

$$n_1(s) = \frac{s^2}{s^3 - s^2} = \frac{s^2}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s-1}$$

مجال n_1 = ح - { 0 ، 1 }

$$\frac{1}{s-1} = n_1(s)$$

$$n_2(s) = \frac{s(s^3 + s^2 + s)}{s^4 - s^3} = \frac{s(s^2 + s + 1)}{s^3(1 - s)} = \frac{s(s^2 + s + 1)}{s^3(1 - s)}$$

$$= \frac{(s^2 + s + 1)}{s^2(1 - s)}$$

مجال n_2 = ح - { 0 ، 1 }

$$\frac{1}{s-1} = n_2(s)$$

$\therefore n_1(s) = n_2(s)$ ، مجال $n_1 =$ مجال n_2

$\therefore n_1 = n_2$



١

$$\text{إذا كان } n, (s) = \frac{s^2}{s^2 + 8}$$

$$n, (s) = \frac{s^2 + 4s}{s^2 + 8s + 16} \text{ أثبت أن : } n = 1$$

الحل

٢

$$\text{إذا كان } n, (s) = \frac{s^2 + 6s}{(s^2 + 3s)(s - 1)} = n, (s) = \frac{s^2}{s - 1}$$

بين إذا كان $n = 2$ أم لا ؟ مع ذكر السبب

الحل

٣

أوجد المجال المشترك الذي تتساوى فيه الدالتان:

$$n, (s) = \frac{s^2 + 9s + 20}{s^2 - 16} = n, (s) = \frac{s + 5}{s - 4}$$

الحل

٤

$$\text{إذا كان } n, (s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 6s - 6}$$

$$n, (s) = \frac{s^2 - 6s - 9}{s^2 - 9} \text{ أثبت أن : } n, (s) = n, (s) \text{ لجميع قيم } s \text{ التي تنتمي إلى المجال المشترك ، وأوجد هذا المجال}$$

الحل

$$n, (s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 6s - 6} = \frac{(s - 2)(s + 2)}{(s - 2)(s + 3)}$$

$$\frac{s + 2}{s + 3} = n, (s) \quad \text{مجال } n = 1 \text{ ح - } \{2, -2\}$$

$$n, (s) = \frac{s^2 - 6s - 9}{s^2 - 9} = \frac{(s - 3)(s + 3)}{(s - 3)(s + 3)}$$

$$= \frac{(s + 3)(s - 3)}{(s + 3)(s - 3)}$$

$$\frac{s + 3}{s - 3} = n, (s) \quad \text{مجال } n = 2 \text{ ح - } \{3, 0, -3\}$$

$\therefore n, (s) = n, (s)$ بينما مجال $n = 1 \neq$ مجال $n = 2$

$\therefore n, (s) = n, (s)$ فقط في المجال المشترك

$$\text{ح - } \{3, 0, -3\}$$

جمع وطرح الكسور الجبرية



إعداد / محمود عوض

الخطوات:

- ١ ترتيب حدود المقادير (يعني ١٥ - ١٣ س + ٢ س^٢ رتبة بإشاراته وخليه كده ٢ س^٢ - ١٣ س + ١٥)
- ٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن
- ٣ إخراج المجال المشترك (ح - أصفار المقامات)
- ٤ حذف العوامل المتشابهة في كل كسر لوحده (إعني تحذف قوس من الكسر الأول مع قوس من الكسر الثاني)
- ٥ لو لقيت المقامات موحدة : خذ مقام منهم وإجمع البسطين أو اطرحهم (حسب العملية).

$$\text{زى كده : } \frac{3 + \text{س}}{2 + \text{س}} = \frac{3}{2 + \text{س}} + \frac{\text{س}}{2 + \text{س}}$$

لو المقامات غير موحدة : وحد المقامات كالتالى :

شوف إيه اللي موجود في مقام الأول ومش موجود في مقام التاني واضربه × الكسر التاني كله (بسط ومقام)
وشوف إيه اللي موجود في مقام التاني ومش موجود في مقام الأول واضربه × الكسر التاني كله (بسط ومقام)

$$\text{زى كده : } \frac{3 + \text{س}}{(2 - \text{س})(3 - \text{س})} + \frac{\text{س}}{2 - \text{س}}$$



$$\text{هيبقى كده : } \frac{3 + \text{س}}{(2 - \text{س})(3 - \text{س})} + \frac{\text{س}(3 - \text{س})}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})}$$

$$\text{أو كده : } \frac{1}{1 - \text{س}} + \frac{\text{س}}{1 + \text{س}}$$

$$\text{هيبقى كده : } \frac{1 + \text{س}}{(1 + \text{س})(1 - \text{س})} + \frac{\text{س}(1 - \text{س})}{(1 - \text{س})(1 + \text{س})}$$

٦ اجمع المتشابه في البسط ولو نفع يتحلل حله و ضع المقدار في أبسط صورة

$$\text{فمثلا : } \frac{1 + \text{س}}{2 - \text{س}} = \frac{(1 + \text{س})(3 - \text{س})}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})} = \frac{3 + 2\text{س} - \text{س}^2}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})} = \frac{3 + \text{س} + \text{س}^2 - \text{س}^2}{(3 - \text{س})(2 - \text{س})}$$

لو لقيت مقدار فيه حدين مطروحين ومش مرتب

$$\begin{array}{lcl} \text{زى كده} & 3 - \text{س} & \text{هنخليه كده} - (3 - \text{س}) \\ \text{أو كده} & 1 - \text{س}^2 & \text{هنخليه كده} - (\text{س}^2 - 1) \end{array}$$

ملحوظة هامة


أمثلة محلولة

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{3-س}{4} - \frac{س}{12+7س-1} = \frac{س-1}{4س}$$

الحل

$$\frac{3-س}{4} - \frac{س}{(3-س)(4-س)} = \frac{س-1}{(4-س)س}$$

المجال = ح - { 0 ، 3 ، 4 } 

$$\frac{4}{(4-س)س} - \frac{1}{4-س} = \frac{س-1}{(4-س)س}$$

نؤخذ المقامات : نضرب الكسر الأول × س

$$\frac{4}{(4-س)س} - \frac{س}{(4-س)س} = \frac{س-1}{(4-س)س}$$

خذ منهم مقام واضرح البسطين

$$\frac{1}{س} = \frac{س-4}{(4-س)س}$$

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س+2}{3+س} + \frac{س+2}{س-4} = \frac{س-5}{6+س}$$

الحل

$$\frac{س+2}{(2-س)(3-س)} + \frac{س(2+س)}{(2-س)(4-س)} = \frac{س-5}{(2-س)(6+س)}$$

المجال = ح - { 2 ، 2- ، 3 } 

$$\frac{س+2}{(2-س)(3-س)} + \frac{س}{2-س} = \frac{س-5}{(2-س)(3+س)}$$

نؤخذ المقامات : نضرب الكسر الأول × (3-س)

$$\frac{س+2}{(2-س)(3-س)} + \frac{س(3-س)}{(2-س)(3-س)} = \frac{س-5}{(2-س)(3+س)}$$

اضرب س × القوس واجمع البسطين

$$\frac{س+2}{(2-س)(3-س)} = \frac{س+3+س-5}{(2-س)(3-س)} = \frac{س-2}{(2-س)(3-س)}$$

نص مهم وعضو

معلم اول رياضيات

٤ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س}{س-1} + \frac{س^2}{1-س} = \frac{س}{س}$$

الحل

$$1-س \text{ نخليه } - (س-1)$$

$$\frac{س}{(1-س)} + \frac{س^2}{1-س} = \frac{س}{(1-س)}$$

نضرب المسالب اللي قدام القوس × الـ + بتاعت الجمع

$$\frac{س}{1-س} - \frac{س^2}{1-س} = \frac{س}{1-س}$$

خذ بالك ان العملية اتحولت طرح

المجال = ح - { 1 } 

$$\frac{س}{1-س} - \frac{س^2}{1-س} = \frac{س}{1-س} \Rightarrow \frac{س-س^2}{1-س} = \frac{س}{1-س}$$

٣ أوجد الدالة ن في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س^2-12+س}{س-4} + \frac{س^2-12+س}{س-4} = \frac{س-10}{س+1}$$

الحل

$$\frac{(س-6)(س+2)}{(س-4)} + \frac{(س-6)(س+2)}{(س-4)} = \frac{س-10}{(س+1)}$$

المجال = ح - { 0 ، 2 } 

$$\frac{س+1}{2-س} + \frac{س+6}{2-س} = \frac{س-10}{س+1}$$

$$\frac{س+1+س+6}{2-س} = \frac{س-10}{س+1}$$

اجمع الحدود المتشابهة اللي في البسط

$$\frac{س^2-5}{2-س} = \frac{س-10}{س+1}$$

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال :

$$\frac{س - ٥}{س + ٥} + \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ١} = (س)$$

الحل

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$\frac{س + ٢}{س^٢ - ٤} + \frac{س}{س^٢ + ٢س} = (س)$$

الحل

٤ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$\frac{س + ٤}{س^٢ - ١٦} - \frac{س}{س - ٤} = (س)$$

الحل

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + ٢س + ٤} - \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٢ - ٨} = (س)$$

الحل



ضرب الكسور الجبرية



١ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن (متناسخ العامل المشترك)

٢ إخراج المجال المشترك (ح - أصفار المقامين)

٣ حذف العوامل المشتركة بين أي بسط وأي مقام

يعني تقدر تحذف قوس من بسط الأول مع التي شبهه في مقام الثاني وهكذا وده بينفع في الضرب ومش بينفع في الجمع

٤ ضرب البسط × البسط والمقام × المقام

مثال:

أوجد ن (س) في أبسط صورة حيث

$$ن(س) = \frac{س^2 + 3س - 4}{س + 3} \times \frac{س + 1}{س^2 - 1}$$

الحل:

$$ن(س) = \frac{(س + 1)(س - 3)(س + 4)}{س + 3} \times \frac{س + 1}{(س - 1)(س + 1)}$$

$$المجال = ح - \{1, -3, -4\} ، ن(س) = 1$$

مثال:

أوجد ن (س) في أبسط صورة حيث

$$ن(س) = \frac{س^2 + 3س - 4}{س + 3} \times \frac{س + 1}{س^2 - 1}$$

الحل:

$$ن(س) = \frac{(س + 1)(س - 3)(س + 4)}{س + 3} \times \frac{س + 1}{(س - 1)(س + 1)}$$

$$المجال = ح - \{1, -3, -4\} ، ن(س) = 1$$

نص محمود عوض حسن
معلم أول رياضيات



قسمة الكسور الجبرية

* كل اللي هتعمله انت تحول القسمة إلى ضرب كالتالي :

الـ ÷ خليها × ← وشقلب الكسر التاني ← وحل بخطوات الضرب عادي

* ملحوظة : فيه اختلاف صغير في مسائل القسمة لما تكتب المجال وهو :

المجال في القسمة = ح - أصفار المقامين وأصفار بسط الثاني

مثال:

أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^2 + 3س - 4}{س + 3} \div \frac{س + 1}{س^2 - 1}$$

الحل:

$$ن(س) = \frac{س^2 + 3س - 4}{س + 3} \times \frac{س^2 - 1}{س + 1}$$

$$= \frac{(س + 1)(س - 3)(س + 4)}{(س + 3)(س + 1)}$$

$$المجال = ح - \{1, -3, -4\}$$

$$ن(س) = \frac{س + 4}{س + 3}$$

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 - 1}{س^2 + 3} \times \frac{س + 1}{س^2 + س + 1}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 - 1}{س^2 + 3} \times \frac{(س + 1)(س - 1)}{(س^2 + س + 1)(س - 1)}$$

المجال = ح - { ١ ، ٠ }

$$ن(س) = \frac{س + 1}{س}$$

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 - 8}{س^2 + 2س + 4} \times \frac{س + 3}{س^2 + 4س + 4}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - 2)(س + 4)}{(س + 2)^2} \times \frac{(س + 3)(س - 2)}{(س + 2)^2}$$

المجال = ح - { ٢ ، -٣ }

$$ن(س) = 1$$

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + 2س + 9}{س^2 + 3} \div \frac{س^2 + 2س + 9}{س^2 + 3}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 + 2س + 9}{س^2 + 3} \times \frac{س^2 + 3}{س^2 + 2س + 9}$$

$$ن(س) = \frac{(س + 2)(س - 3)}{(س + 2)(س - 3)} \times \frac{(س + 2)(س - 3)}{(س + 2)(س - 3)}$$

$$ن(س) = \frac{س + 2}{س - 3} \quad \text{المجال} = ح - \{ ٣ ، ٠ ، -٢ \}$$

تصميم
معلم اول رياضيات
يوسف

تصميم
معلم اول رياضيات
يوسف



$$٥ أوجد: ن(س) = \frac{س^2 + 4س + 4}{س^2 + 2س + 1} \div \frac{س^2 + 4س + 4}{س^2 + 2س + 1}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (٣) إن أمكن

الحل

$$ن(س) = \frac{(س + 2)^2}{(س + 1)^2} \times \frac{(س + 1)^2}{(س + 2)^2}$$

المجال = ح - { ٣ ، -٢ }

$$ن(س) = \frac{س + 1}{س - 3}$$

$$ن(٢) = \frac{١ + ٢}{٣ - ٢} = ٣$$

ن (٣) غير ممكنة لأن ٣ - ٣ = ٠ للمجال

$$٤ إذا كانت ن(س) = \frac{س^2 - 9}{س^2 + 3س + 2} \div \frac{س^2 - 9}{س^2 + 3س + 2}$$

فأوجد ن (س) في أبسط صورة موضعا المجال

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 - 9}{س^2 + 3س + 2} \times \frac{س^2 + 3س + 2}{س^2 - 9}$$

$$ن(س) = \frac{(س - 3)(س + 3)}{(س + 2)(س + 1)} \times \frac{(س + 2)(س + 1)}{(س - 3)(س + 3)}$$

$$ن(س) = \frac{(س - 3)(س + 3)}{(س + 2)(س + 1)} \times \frac{(س + 2)(س + 1)}{(س - 3)(س + 3)}$$

المجال = ح - { ٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ }

$$ن(س) = \frac{(س - 3)(س + 3)}{(س + 2)(س + 1)}$$

أوجد ن (س) وعين مجالها حيث:

$$\frac{10 - 3س}{5 + 3س + 16س} \times \frac{1 + س}{2 - س} = ن(س)$$

ثم أوجد ن (٠) ، ن (١) إن أمكن

الحل

$$\frac{(2 - س)(5 + س)}{(1 + س)(5 + 3س + 16س)} \times \frac{1 + س}{2 - س} = ن(س)$$

$$\frac{1}{3} ، 0 ، 1 ، 2 \text{ - المجال = ح}$$

$$ن(س) = \frac{1}{1 + 3س}$$

$$ن(0) = \frac{1}{1 + 0 \times 3} = 1$$

ن (١) غير ممكنة لأن ١ - المجال

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{10 - 2س}{9 + 6س} \div \frac{15 - 2س}{9 - س} = ن(س)$$

الحل

مناشئ: ال ÷ هنقلب الكسر الثاني

$$\frac{10 - 2س}{9 + 6س} \times \frac{9 - س}{15 - 2س} = ن(س)$$

$$\frac{(3 - س)(3 - س)}{(3 - س)2} \times \frac{(3 - س)(3 - س)}{(3 - س)(3 - س)} = ن(س)$$

$$\text{المجال = ح} - \{0 ، 3 ، 2\}$$

$$ن(س) = \frac{3 - س}{2}$$



نصه
معلم اول رياضيات

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{24 + 4س}{5 - 36س} \times \frac{36 + 12س}{1 - 6س} = ن(س)$$

الحل

عاري هنعمل إيه في المقدار ٣٦ - س !!

هنخليه كده - (٣٦ - س)

$$\frac{(4 + س)(6 - س)}{(6 + س)(6 - س)} \times \frac{(6 - س)(6 - س)}{(6 - س)(6 - س)} = ن(س)$$

$$\text{المجال = ح} - \{0 ، 6 ، 6\}$$

$$ن(س) = \frac{4 - س}{س}$$

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث :

$$\frac{15 - 3س}{5 + 6س} \div \frac{2 + 3س}{1 - 6س} = ن(س)$$

الحل

١- س٢ هنخليه - (١ - س٢) ونحول الضرب لقسمة

$$\frac{15 - 3س}{5 + 6س} \times \frac{1 - 6س}{2 + 3س} = ن(س)$$

$$\frac{(3 - س)(5 - س)}{(5 - س)3} \times \frac{(1 - س)(2 - س)}{(1 + س)(1 - س)} =$$

$$\text{المجال = ح} - \{0 ، 1 ، 1\}$$

$$ن(س) = \frac{(1 - س)(2 - س)}{3(1 + س)}$$

نصه
معلم اول رياضيات

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س} \times \frac{س^2 - س - 1}{س^2 - 1}$$

الحل

الحل

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{س^4 + 12}{س^5 - 20} \times \frac{س^3 - 10}{س + 2}$$

الحل

الحل

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث :

$$ن(س) = \frac{س^3 - 2س^2}{س^4 - 9} + \frac{س^3 - 3س^2}{س^2 - 6س - 9}$$

الحل

الحل

٤ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + 2}{س^3 + 9س^2 + 1} \div \frac{س^2 + 2س - 2}{س^2 - 2س - 2}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (-٢) إن أمكن

الحل

الحل

المعكوس الضربي للكسر الجبري



◆ إذا رمزنا للكسر الجبري بالرمز n (س) فإن معكوسه الضربي يرمز له بالرمز n^{-1} (س)

◆ إذا كان n (س) $\frac{1-s}{3+s}$ فإن n^{-1} (س) $\frac{3+s}{1-s}$ (شقلب الكسر يجيك معكوسه)

◆ مجال $n^{-1} = ح -$ أصفار البسط و المقام من المثال اللي فات: مجال n^{-1} (س) $= ح - \{ -3, 1 \}$

تدريب ١

$$\frac{s^3 + s^2}{27 + s^3} = (s) \text{ إذا كان } n$$

أوجد n^{-1} (س) في أبسط صورة مبينا مجال n^{-1} (س)

الحل

مثال ١

$$\frac{s^2 - 9}{s^2 + s - 6} = (s) \text{ إذا كان } n$$

أوجد n^{-1} (س) في أبسط صورة مبينا مجال n^{-1} (س)

الحل

$$n^{-1} (س) = \frac{s^2 + s - 6}{s^2 - 9} \text{ شقلبنا الكسر}$$

$$\frac{(s-3)(s+3)}{(s-3)(s+3)} = \text{حللنا}$$

المجال $= ح - \{ -3, 3 \}$

$$n^{-1} (س) = \frac{s-3}{s+3} \text{ اختصرنا}$$

تدريب ٢

$$\frac{s^3 - s^2}{(2+s^2)(3-s)} = (س) \text{ إذا كان } n$$

فأوجد: ١) n^{-1} (س) مبينا مجالها

٢) قيمة s إذا كان n^{-1} (س) $= 3$

الحل

مثال ٢

$$\frac{s^2 - 2s}{s^2 + s - 2} = (س) \text{ إذا كان } n$$

فأوجد: ١) n^{-1} (س) مبينا مجالها

٢) قيمة s إذا كان n^{-1} (س) $= 3$

الحل

$$n^{-1} (س) = \frac{s^2 + s - 2}{s^2 - 2s} = \frac{(s-2)(s+1)}{s(s-2)}$$

مجال $n^{-1} = ح - \{ 0, 2 \}$

$$n^{-1} (س) = \frac{s+1}{s}$$

$$\therefore n^{-1} (س) = 3 \therefore \frac{s+1}{s} = 3 \text{ (مقص)}$$

$$\therefore s - 1 = 3s \therefore s^2 = 1 \therefore s = \pm 1$$

أسئلة اختر على الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ مجموعة أصفار الدالة $(س) = س^2 + ٤$ في ح هي
 (أ) $\{ ٢ \}$ (ب) $\{ ٢, -٢ \}$ (ج) ح (د) \emptyset
- ٢ مجموعة أصفار الدالة د: $(س) = س^3 - ٣س$ هي
 (أ) $\{ ٠ \}$ (ب) $\{ ٣ - \}$ (ج) $\{ (٠, ٣ -) \}$ (د) ح
- ٣ مجموعة أصفار الدالة د: $(س) = س(س^2 - ٢س + ١)$ هي
 (أ) $\{ ١, ٠ \}$ (ب) $\{ ١, -١ \}$ (ج) $\{ (٠, ١ -) \}$ (د) $\{ ١ \}$

الحل:

- ٤ إذا كانت ص $(د) = \{ ٢ \}$ ، $(س) = س^3 - م$ فإن م
 (أ) $\sqrt[3]{٢}$ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

الحل:

- ٥ إذا كانت ص $(د) = \{ ٥ \}$ ، $(س) = س^3 - ٣س^2 + أ$ فإن أ
 (أ) $٥ -$ (ب) -٥ (ج) ٥ (د) ٥٠

الحل:

- ٦ مجال الدالة ن $(س) = \frac{س}{١ - س}$ هو
 (أ) ح - { صفر } (ب) ح - { ١ } (ج) ح - { صفر ، ١ } (د) ح - { ١ - }

- ٧ إذا كان ن $(س) = \frac{٧ - س}{٢ + س}$ ، ن $(س) = \frac{س}{س - ٧}$ وكان المجال المشترك هو ح - { ٧ ، ٢ - } فإن ك
 (أ) ٢ (ب) ٧ (ج) ٢ - (د) ٧ -

- ٨ إذا كانت ن $(س) = \frac{١ + س}{٢ - س}$ ، ن $(س) = \frac{٤}{٢ - س}$ وكان ن $(س) = ن(س)$ فإن أ
 (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

- ٩ إذا كانت س \neq صفر فإن $\frac{س}{١ + س} \div \frac{س}{١ + س} =$
 (أ) $٥ -$ (ب) ١ - (ج) ١ (د) ٥

- ١٥ مجال المعكوس الضربي للدالة $(س) = \frac{٢ + س}{٣ - س}$ هو
 (أ) $\{ ٣ \}$ (ب) ح - { ٣ ، ٢ - } (ج) ح - { ٣ } (د) ح

- ٥٥ إذا كان للكسر الجبري $\frac{س - أ}{س + ٥}$ معكوس ضربي وهو $\frac{س + ٥}{٣ + س}$ فإن أ
 (أ) ٣ (ب) $٥ -$ (ج) ٣ - (د) ٥

الواجب المنزلي

الأصفار والمجال

- ١ إذا كانت $\{ 2, -2 \}$ هي مجموعة أصفار الدالة $D(s) = s^2 + m$ فأوجد قيمة m
- ٢ أوجد المجال المشترك لكل من: $N_1(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 5s + 6}$ ، $N_2(s) = \frac{s^3}{s^2 - 1}$
- ٣ إذا كان مجال الدالة D حيث $D(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 4}$ هو $C - \{ 2 \}$ فأوجد قيمة A

تساوي كسرين جبريين

- ٤ إذا كانت: $N_1(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 5s + 6}$ ، $N_2(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 9}$ بين ما إذا كانت $N_1 = N_2$ أم لا مع ذكر السبب
- ٥ إذا كانت: $N_1(s) = \frac{s^2}{s^3 - 2s}$ ، $N_2(s) = \frac{s}{s^3 - 2s}$ فاثبت أن $N_1 = N_2$
- ٦ أوجد المجال المشترك الذي تساوى فيه الدالتان: $N_1(s) = \frac{1}{s-2}$ ، $N_2(s) = \frac{s+2}{s^2 - 1}$

جمع وطرح الكسور الجبرية

- ٧ أوجد $N(s)$ في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $N(s) = \frac{s^3 - 4}{s^2 + 5s + 6} - \frac{s^2 + 2}{s^2 - 1}$
- ٨ أوجد $N(s)$ في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $N(s) = \frac{s - 3}{s - 3} - \frac{s - 3}{s^2 + 7s + 12}$
- ٩ أوجد $N(s)$ في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $N(s) = \frac{s - 5}{s^2 + 6s + 5} + \frac{s - 2}{s^2 - 1}$

ضرب وقسمة الكسور الجبرية

- ٥٥ أوجد $N(s)$ في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $N(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 + 1} \div \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$
- ٥٥ أوجد $N(s)$ في أبسط صورة مبينا المجال حيث: $N(s) = \frac{s^2 + 2s - 3}{s + 3} \div \frac{s - 1}{s + 1}$
- ٥٦ إذا كان $N(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 8} \times \frac{s^2 - 9}{s^2 + 7}$ أوجد $N(s)$ في أبسط صورة مبينا مجالها ثم احسب قيمة $N(1)$

المعكوس الضربي للكسر الجبري

- ٥٦ إذا كان $N(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$ فأوجد: (١) $N^{-1}(s)$ مبينا مجالها (٢) $N^{-1}(3)$
- ٥٥ إذا كان $N(s) = \frac{s^2 - 4s - 5}{s^2 - 25}$ فأوجد: (١) $N^{-1}(s)$ مبينا مجالها (٢) $N^{-1}(5)$



الاحتمال



التقاطع \cap

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

$$P(A \cap B) = 0, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ملحوظة: متى يطلب $P(A \cap B)$ بالطريقة اللفظية؟

لو قلنا : أوجد احتمال وقوع الحدث أ و ب معا

الاتحاد \cup

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ملحوظة: متى يطلب $P(A \cup B)$ بالطريقة اللفظية؟

لو قلنا : أوجد احتمال وقوع الحدث أ أو ب
أو قلنا : أوجد احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

إذا كانت أ و ب فإن : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ الصغيرة

مثال

إذا كان $P(A) = 0.2$ ، $P(B) = 0.6$ ،

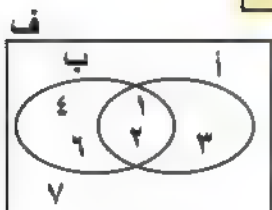
$P(A \cup B) = 0.7$ أوجد : $P(A \cap B)$

الحل :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$0.1 = 0.2 + 0.6 - 0.7$$

شكل فن



$$P(A \cap B) = \frac{2}{7}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{العدد الكلي}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} =$$

إذا كانت أ و ب فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ الكبيرة

مثال

إذا كان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

أوجد : $P(A \cup B)$

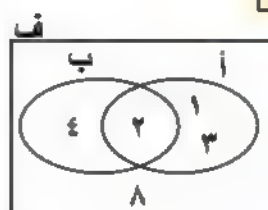
الحل :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{19}{30}$$

بالآلة الحاسبة

شكل فن



$$P(A \cup B) = \frac{7}{8}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cup B}{\text{العدد الكلي}}$$

$$\frac{4}{5} =$$

المكاملة

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

القاعدة العامة :

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

ملحوظة: متى يطلب ل(أ) بالطريقة اللفظية؟

لوقالك : أوجد احتمال **عدم** وقوع الحدث أ

مثال

$$\text{إذا كان } ل(أ) = \frac{1}{5} , ل(ب) = \frac{1}{3} ,$$

أوجد : ل(أ) (١) ل(أ) (٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب

الحل :

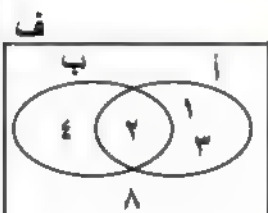
$$(١) ل(أ) = ١ - ل(ب) = ١ - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب : يقصد به ل(ب')

$$ل(ب') = ١ - ل(ب) = ١ - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

شكل فن

أ : هي كل العناصر التي قدامك ما عدا عناصر أ



$$ل(أ) = \frac{2}{8}$$

$$ل(أ) = \frac{2}{8}$$

$$ل(أ) = \frac{2}{8}$$

$$ل(أ) = \frac{2}{8}$$

الفرق

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$$

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متافيان فإن :

$$ل(أ - ب) = ل(أ)$$

ملحوظة: متى يطلب ل(أ - ب) بالطريقة اللفظية؟

لوقالك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **فقط**

أو قالك : احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب

لوعرفت الفرق والتقاطع فإن :

$$ل(أ) = ل(أ - ب) + ل(أ \cap ب)$$

مثال

$$\text{إذا كان } ل(أ) = \frac{1}{4} , ل(ب) = \frac{1}{3} , ل(أ \cap ب) = \frac{1}{5}$$

أوجد : ل(أ - ب) ، ل(أ - ب)

الحل :

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

شكل فن

أ - ب : هي العناصر الموجودة في أ ومش موجودة في ب

ب - أ : هي العناصر الموجودة في ب ومش موجودة في أ

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

أمثلة محلولة

إعداد / محمود عوض حسن

١ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.6$ ، $P(A \cap B) = 0.2$
أوجد : $P(A \cup B)$ ، $P(A - B)$

الحل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.7 = 0.3 + 0.6 - 0.2$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$0.1 = 0.3 - 0.2$$

٢ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان $P(A) = \frac{3}{8}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$
أوجد : $P(A \cap B)$ ، $P(A - B)$

الحل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{8} - P(A \cap B)$$

٣ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية
وكان $P(A) = 0.8$ ، $P(B) = 0.7$ ، $P(A \cap B) = 0.6$
فأوجد : ① احتمال عدم وقوع الحدث A
② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

الحل

احتمال عدم وقوع الحدث A معناه $P(A')$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$0.2 = 1 - 0.8$$

احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل معناه $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.9 = 0.8 + 0.7 - 0.6$$

٤ إذا كان A ، B حدثين متنافيين من تجربة عشوائية
وكان $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$
فأوجد $P(B)$

الحل

∵ A ، B حدثان متنافيان ∴ $P(A \cap B) = 0$ صفر

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{4}{12} - \frac{4}{12} = 0$$

٥ صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء ،
٤ كرات حمراء وباقي الكرات بيضاء ، سحب كرة عشوائية
فاحسب احتمال أن تكون الكرة :
① زرقاء ② ليست حمراء ③ زرقاء أو حمراء

العدد الكلى = ١٢ ، عدد الكرات البيضاء = ٣

$$P(\text{احتمال أن تكون زرقاء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{5}{12}$$

$$P(\text{احتمال ليست حمراء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والبيضاء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{احتمال زرقاء أو حمراء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والحمراء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

٦ إذا كان A ، B حدثين متنافيين من تجربة عشوائية
وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$
أوجد $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$

الحل

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان $P(A) = 0.5$ ، $P(B) = 0.8$ ، $P(A \cap B) = 0.1$
فأوجد $P(A \cup B)$ إذا كان : ١) ب متنافيان
٢) $B \supset A$

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب متنافيان :

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.8 = 1.3$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.8 - 0.1 = 1.2$$

ثانياً : إذا كانت $B \supset A$:

$$P(A \cup B) = P(A) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.5$$

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان $P(A) = 0.5$ ، $P(B) = 0.8$ ، $P(A \cap B) = 0.1$
فأوجد قيمة س إذا كان : ١) ب متنافيان
٢) $P(A \cap B) = 0.1$

الحل

أولاً : إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان :

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.8 = 1.3$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.8 - 0.1 = 1.2$$

ثانياً : إذا كان $P(A \cap B) = 0.1$

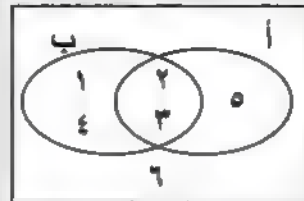
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.8 - 0.1 = 1.2$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.8 - 0.1 = 1.2$$

تمهيد مدهود عوض يم

٩ باستخدام شكل فن المقابل أوجد :



١) $P(A \cap B)$

٢) $P(A - B)$

٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ

الحل

$$P(A \cap B) = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$P(A - B) = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$P(A - B) = \frac{4}{10} = 0.4$$

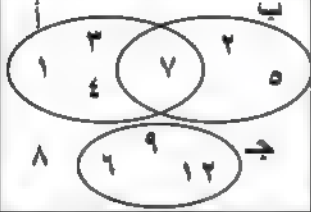
$$P(A - B) = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{10} = 0.8$$

١٠ باستخدام شكل فن أوجد :



١) $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$

٢) $P(B - A)$

٣) $P(A - B)$ ، $P(B)$

الحل

انته أقوم من شكل فن

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

$$\text{وكان ل(أ)} = \frac{4}{9} ، \text{ل(ب)} = \frac{3}{9} ، \text{ل(أ ∩ ب)} = \frac{1}{9}$$

$$\text{أوجد : ل(أ ∪ ب)} ، \text{ل(أ - ب)} ، \text{ل(ب - أ)} ، \text{ل(أ)}$$

الحل

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

$$\text{وكان ل(أ)} = \frac{1}{4} ، \text{ل(ب)} = \frac{1}{4} ، \text{ل(أ ∪ ب)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذا كان : ① ل(أ ∩ ب)} = \frac{1}{8} ، ② أ ، ب متنافيان$$

الحل

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

$$\text{وكان ل(أ)} = ٠,٤ ، \text{ل(ب)} = ٠,٥ ،$$

$$\text{ل(أ ∪ ب)} = ٠,٢ ،$$

$$\text{أوجد : ل(أ ∩ ب)} ، \text{ل(ب - أ)}$$

الحل

٤ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠

، سحبت بطاقة عشوائية ، أوجد احتمال أن تكون البطاقة تحمل عددا :

$$\text{① يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥}$$

$$\text{② يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥}$$

الحل

أسئلة اختر على الإحصاء

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان A ، B حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن $P(A \cap B) = \dots$
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٠,٥ (د) Φ

٢ إذا كان A ، B حدثين متنافيين فإن $P(A \cap B) = \dots$
 (أ) Φ (ب) صفر (ج) ٠,٥٦ (د) ١

٣ إذا كانت $A \cap B$ لتجربة عشوائية ما وكان $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ فإن $P(A \cap B) = \dots$
 (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) ١

٤ إذا كان $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ فإن $P(A \cap B) = \dots$
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{2}$

٥ إذا كان $A \cap B$ فإن $P(A \cup B)$ تساوى
 (أ) صفر (ب) $P(A)$ (ج) $P(B)$ (د) $P(A \cap B)$

٦ إذا كان A ، B حدثين متنافيين وكان $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ فإن $P(B) = \dots$
 (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) ١

٧ إذا كان احتمال وقوع الحدث A هو ٦٥% فإن احتمال عدم وقوعه يساوى
 (أ) ٣٥% (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) ٠,٦٥ (د) ١

٨ إذا كان احتمال وقوع الحدث A هو ٧٥% فإن احتمال عدم وقوعه هو
 (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) ١

٩ إذا أُلقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى
 (أ) صفر% (ب) ٢٥% (ج) ٥٠% (د) ١٠٠%

١٥ إذا أُلقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردي يساوى
 (أ) صفر (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) ١

٢٥ إذا أُلقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ يساوى
 (أ) صفر (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{2}$

تراكمي

١ إذا كانت النسبة بين محيطي مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتهما = ١ : ٤

٢ المعكوس الجمعي للكسر $\frac{3}{1+2}$ هو $\frac{3}{1+2}$

٣ إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو $3 - س$ (أ) $3 + س$ (ب) $3 س$ (ج) $3 - س$ (د) $\frac{3}{س}$

٤ إذا كان أ^٢ - ب^٢ = ٢١ ، أ + ب = ٧ فإن أ - ب = ٣

٥ إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره بعد ٥ سنوات هو $س + ٥$ وعمره منذ ٣ سنوات هو $س - ٣$

٦ احتمال الحدث المستحيل = صفر بينما احتمال الحدث المؤكد = ١

٧ إذا كان س^٢ - ص^٢ = ٢ (س + ص) فإن س - ص = ٢

٨ إذا كان (٥ ، س - ٧) = (٥ + ص ، ١ - ٥) فإن س + ص = ٦

٩ الدالة د حيث د(س) = س^٦ + ٢س^٤ - ٣ كثيرة حدود من الدرجة السادسة

١٠ إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ - أ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن أ = ١

١١ عددان موجبان مجموعهما ٧ ، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ٣ ، ٤

١٢ إذا كان ٢س = ١ فإن $\frac{1}{5} س = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

١٣ مجموعة حل المعادلة ٢س + ٤ = ٠ في ط هي

١٤ إذا كان المقدار س^٢ + كس + ٣٦ مربعا كاملا فإن ك = ± ١٢

١٥ إذا كان ٥س = ٤ فإن ٥س - ١ = $\frac{1}{5} \times ٤ = \frac{4}{5}$

١٦ إذا كان ٣س + ٧ = ١ فإن س = -٧

١٧ إذا كان ٣س + ٣س + ٣س = ٣ × ٣س = ١ + ٣س

١٨ $\sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$

١٩ مجموعة حل المعادلة ٢س + ٤ = ٠ في ح هي

٢٠ إذا كانت س^٢ - ص^٢ = ٨١ فإن $\frac{س}{ص} = ٩$

٢١ $[١ ، ٥] \cup [-٢ ، ٣] =$

مدرسة مصر الخير الإعدادية لجهينة - سوهاج

الترم
الثاني

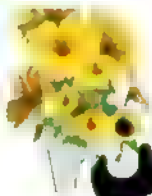
الصف الثالث الإعدادي

٢٠٢٠

إهداء إلى الطالبة



ملزمة
ألهند سنة



إعداد وتصميم

محمود عوض حسن

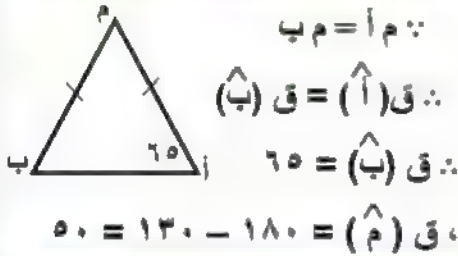
معلم أول رياضيات

استعدوا للمفامرة

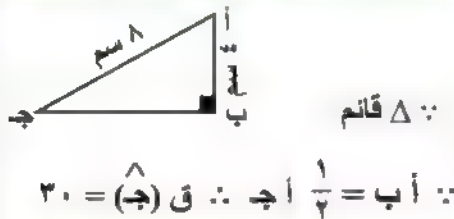


أساسيات تراكمية

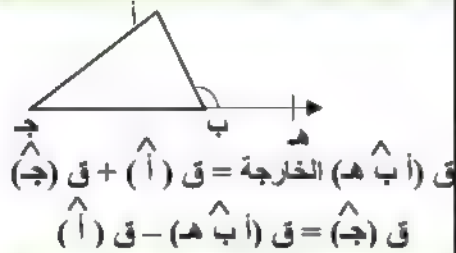
في المثلث المتساوي الساقين
زاويتا القاعدة متساويتان



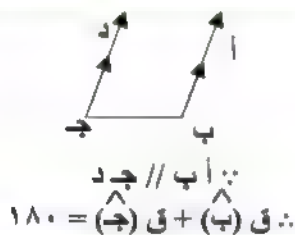
إذا كان طول الضلع = نصف طول
الوتر فإن الزاوية المقابلة له = 30°



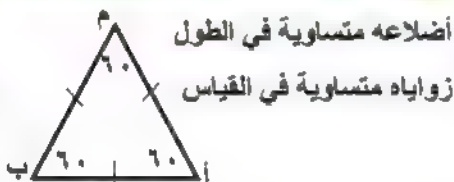
قياس الزاوية الخارجة عن المثلث -
مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



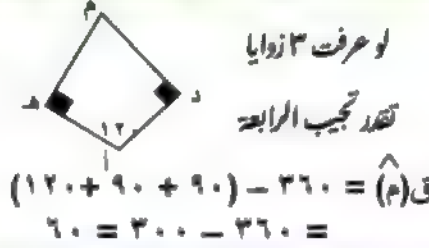
إذا وجد توازي حرف U فإن
الزاويتان المتداخلتان متكاملتان



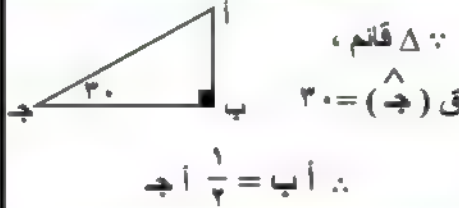
المثلث المتساوي الأضلاع



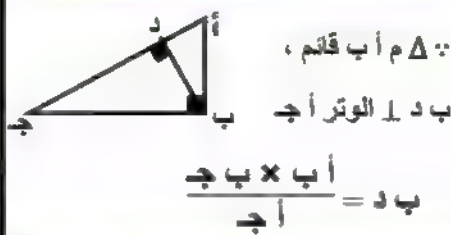
مجموع قياسات زوايا
الشكل الرباعي = 360°



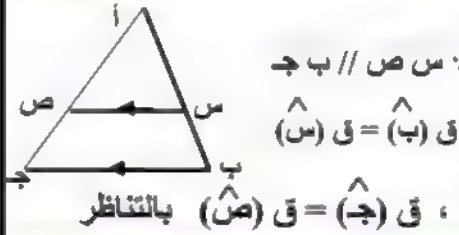
طول الضلع المقابل للزاوية 30°
= نصف طول الوتر



نظرية إقليدس



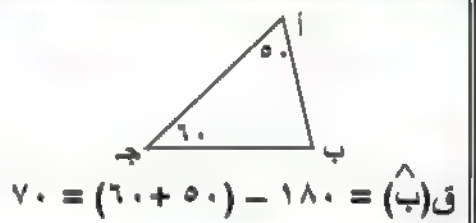
إذا وجد توازي حرف F فإن
الزاويتان المتناظرتان متساويتان



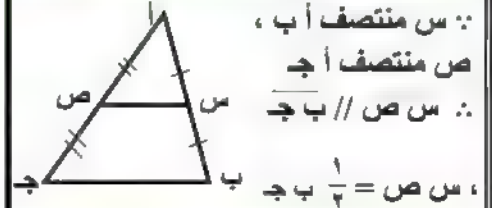
حالات تطابق مثلثين

- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

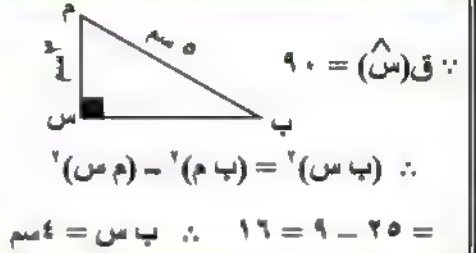
مجموع قياسات زوايا $\Delta = 180^\circ$



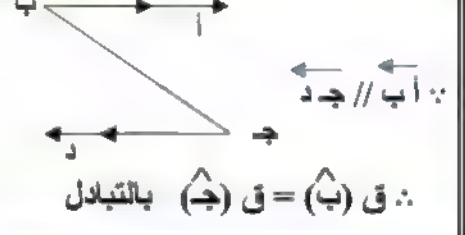
القطعة الواصلة بين منتصفى
ضلعين توازي الضلع الثالث



نظرية فيثاغورث



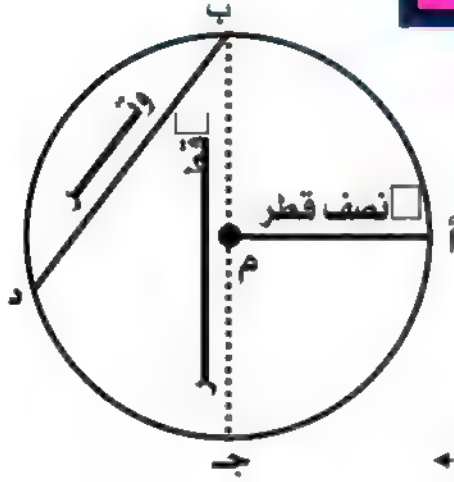
إذا وجد توازي حرف Z فإن
الزاويتان المتبادلتان متساويتان



إثبات التوازي

نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

- زاويتان متبادلتان متساويتان
- زاويتان متناظرتان متساويتان
- زاويتان متداخلتان متكاملتان



نصف القطر : هو قطعة مستقيمة طرفها مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة

الوتر : هو قطعة مستقيمة طرفها أى نقطتين على الدائرة

القطر : هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولاً



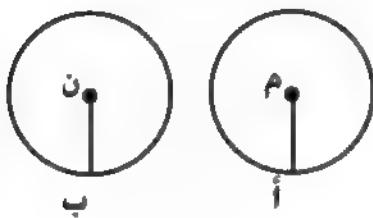
محور التماثل : هو المستقيم المار بمركز الدائرة.

الدائرة لها عدد لا نهائى من محاور التماثل

عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة

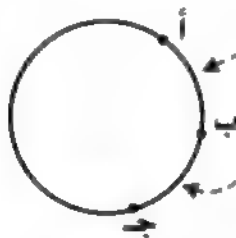
الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	<p>$\overleftrightarrow{AB} \cap \text{الدائرة } M = \{A, B\}$ بينما $\overleftrightarrow{AB} \cap \text{سطح الدائرة} = \overline{AB}$</p>



الدائرتان المتطابقتان : هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.

إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن $M = N$

القوس : هو جزء من خط الدائرة



من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب : \widehat{AB}

من ب إلى ج يسمى قوس ويكتب : \widehat{BC}

من أ إلى ج يسمى قوس ويكتب : \widehat{AC} أو \widehat{AB}

محيط الدائرة = 2π نق

طول ربع الدائرة = $\frac{1}{4}\pi$ نق

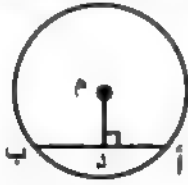
مساحة الدائرة = π نق²

طول نصف الدائرة = π نق

نتائج هامة



المستقيم المار بمركز الدائرة
وعمودياً على أي وتر فيها
ينصف هذا الوتر



$\therefore \overline{MB} \perp \overline{AD}$
 $\therefore \overline{MB}$ منتصف \overline{AB} $\therefore \overline{AB} = \overline{DB}$
فإذا كان $\overline{AB} = 8$ سم فإن $\overline{AD} = 16$ سم

مثال ٣



أوجد طول \overline{AD}

الحل:

في $\triangle MAB$ من فيثاغورث
 $\overline{AB} = 8$ سم
 $\therefore \overline{MB} \perp \overline{AD}$ $\therefore \overline{MB}$ منتصف \overline{AD}

$\therefore \overline{AD} = \overline{DB} = 8$ سم

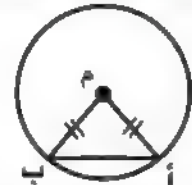
تدريب ٣



$\overline{AB} = 8$ سم أوجد \overline{MB}



أنصاف الأقطار في الدائرة
الواحدة متساوية في الطول



$\therefore \overline{MA} = \overline{MB}$ أنصاف أقطار
 $\therefore \overline{MA} = \overline{MB}$
أي أن: $\angle C(\hat{A}) = \angle C(\hat{B})$

مثال ١



أوجد $\angle C(\hat{MAB})$

الحل:

$\therefore \overline{MA} = \overline{MB}$ أنصاف أقطار

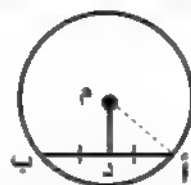
$\therefore \angle C(\hat{A}) = \angle C(\hat{B})$

$$50 = \frac{180 - 80}{2} =$$

تدريب ١



أوجد $\angle C(\hat{AMB})$



$\therefore \overline{MB}$ منتصف الوتر \overline{AB}

$\therefore \overline{MB} \perp \overline{AB}$

$\therefore \angle C(\hat{MAD}) = 90$

مثال ٢



أوجد $\angle C(\hat{MAB})$

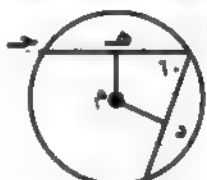
الحل:

$\therefore \overline{MB}$ منتصف \overline{AB} $\therefore \overline{MB} \perp \overline{AB}$

$\therefore \angle C(\hat{MAB}) = 90$

$\therefore \angle C(\hat{MAB}) = 180 - (90 + 50) = 40$

تدريب ٢



أوجد $\angle C(\hat{MDH})$

١ في الشكل المقابل

د، ه منتصفا \overline{AB} ، \overline{AC}
على الترتيب
ق $(\hat{A}) = 120^\circ$
اثبت أن Δ س ص م متساوي الاضلاع

الحل

∵ د منتصف \overline{AB} ∴ $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

∴ ق $(\hat{D}) = 90^\circ$

∵ ه منتصف \overline{AC} ∴ $\overline{EM} \perp \overline{AC}$

∴ ق $(\hat{E}) = 90^\circ$

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

∴ ق $(\hat{D}) + \text{ق}(\hat{E}) + \text{ق}(\hat{A}) + \text{ق}(\hat{C}) = 360^\circ$
 $90^\circ + 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

∴ ق $(\hat{S}) = 60^\circ$ بالتقابل بالرأس

∵ $\overline{SM} = \overline{VM}$ (أنصاف أقطار)

∴ ق $(\hat{S}) = \text{ق}(\hat{M}) = 60^\circ$

∴ Δ س ص م متساوي الاضلاع (جميع زواياه 60°)

٢ في الشكل المقابل

م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم
أب وتر فيها طوله ٢٤ سم
ج منتصف \overline{AB}
أوجد: مساحة Δ ادب

الحل

∵ ج منتصف \overline{AB} ∴ $\overline{MJ} \perp \overline{AB}$ ∴ ق $(\hat{M}) = 90^\circ$

∴ $\overline{AB} = 24$ سم ∴ $\overline{AJ} = 12$ سم

في Δ م ج ا القائم: بتطبيق فيثاغورث

∴ $\overline{MJ} = \sqrt{MA^2 - AJ^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ سم

∴ $\overline{MJ} = 5$ سم ∴ $\overline{MJ} = 13$ سم

∴ $\overline{JD} = 8 - 13 = 5$ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

∴ مساحة Δ ادب = $\frac{1}{2} \times 24 \times 8 = 96$ سم²

٣ في الشكل المقابل

أب وتر في الدائرة م
ج ينصف ب م
د منتصف \overline{AB}
اثبت أن $\overline{DM} \perp \overline{AM}$

الحل

في Δ ا م ج : ∵ $\overline{AM} = \overline{CM}$ (أنصاف أقطار)

∴ ق $(\hat{M}) = \text{ق}(\hat{A}) = 60^\circ$

∴ ق $(\hat{M}) = \text{ق}(\hat{B}) = 60^\circ$ (معطى)

من ١، ٢ ينتج أن:

ق $(\hat{M}) = \text{ق}(\hat{B}) = 60^\circ$ وهما متبادلتان

∴ $\overline{AB} \parallel \overline{DM}$

∵ د منتصف \overline{AB} ∴ $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

∴ $\overline{DM} \parallel \overline{AB}$

٤ في الشكل المقابل

م $\overline{AB} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{CM} \perp \overline{AB}$
ق $(\hat{A}) = 60^\circ$
ق $(\hat{B}) = 70^\circ$
أوجد قياسات زوايا Δ م س ص

الحل

ق $(\hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ$

∵ $\overline{SM} \perp \overline{AB}$ ∴ \overline{SM} منتصف \overline{AB}

∴ $\overline{SM} \perp \overline{AB}$ ∴ \overline{SM} منتصف \overline{AB}

∴ $\overline{SM} \parallel \overline{AB}$ (قطعة واصله بين منتصفى ضلعين)

∴ ق $(\hat{S}) = \text{ق}(\hat{A}) = 60^\circ$ بالتناظر

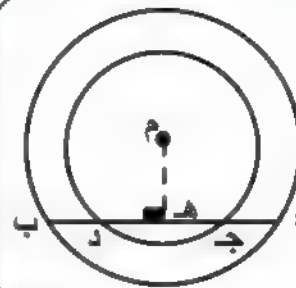
∴ ق $(\hat{M}) = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$

∴ ق $(\hat{M}) = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$

في Δ س م ص:

ق $(\hat{S}) = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ$

١

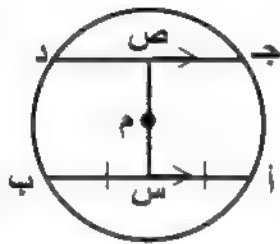


دائرتان متحدتا المركز م
أب وتر في الدائرة الكبرى
يقطع الصغرى في ج، د
اثبت أن: $أج = ب د$

الحل

العمل: نرسم م ه عمودى على أب

٢



أب // جد
س منتصف أب
اثبت أن:
س منتصف جد

الحل

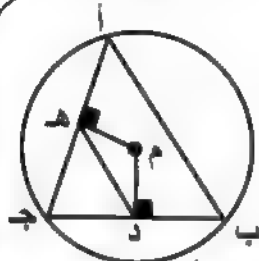
٣



جد قطر في الدائرة م
م ه \perp أب
ق (أ م ه) $= 30^\circ$
أب = ١٠ سم
أوجد طول جد، ه د

الحل

٤



أب ج Δ مرسوم داخل دائرة
م د \perp ب ج، م ه \perp أ ج
اثبت أن: (١) ه د // أب
(٢) محيط Δ ج د ه = $\frac{1}{4}$ محيط Δ أ ب ج

الحل

أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة



أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها $نق$ ، A نقطة فإن النقطة A تقع :

على المركز



إذا كان : $M = A$ = صفر

داخل الدائرة



إذا كان : $M > A$ $نق$

على للدائرة



إذا كان : $M = A$ $نق$

خارج الدائرة

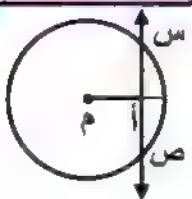


إذا كان : $M < A$ $نق$

أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها $نق$ ، A نقطة \exists المستقيم فإن المستقيم يكون :

قاطع للدائرة

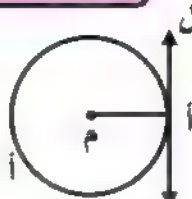


إذا كان : $M > A$ $نق$

$$\vec{L} \cap \text{الدائرة } M = \{S, V\}$$

$$\vec{L} \cap \text{سطح } M = \overline{SV}$$

مماس للدائرة



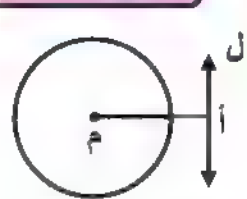
A : نقطة التماس

إذا كان : $M = A$ $نق$

$$\vec{L} \cap \text{الدائرة } M = \{A\}$$

$$\vec{L} \cap \text{سطح } M = \{A\}$$

خارج الدائرة



إذا كان : $M < A$ $نق$

$$\vec{L} \cap \text{الدائرة } M = \emptyset$$

$$\vec{L} \cap \text{سطح } M = \emptyset$$

تدريب

إذا كانت M دائرة طول قطرها 8 سم ، والمستقيم L يبعد عن مركزها 4 سم فإن المستقيم L يكون

إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها 3 سم ، A نقطة في المستوى بحيث $M = A$ سم فإن A تقع الدائرة

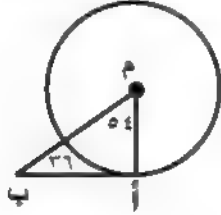
إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها 7 سم ، والمستقيم L مماس ، فإن المستقيم L يبعد عن مركزها سم

نتائج هامة على المماس

اعداد / محمد هادي عيسى

إثبات أن المستقيم مماس

هنثبت ان الزاوية التي بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠



تدريب في الشكل المقابل

اثبت ان AB مماس

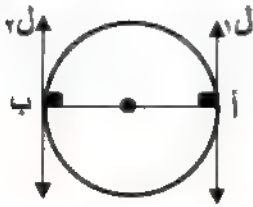
الحل

في $\triangle MAB$:

$$\angle MAB = 180 - (54 + 36) = 90^\circ$$

$\therefore AB$ مماس

المماسان المرسومان من نهايتي قطر متوازيان



$\therefore AB$ قطر

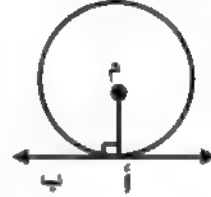
L_1, L_2 مماسان

$$\therefore L_1 \parallel L_2$$

ملحوظة: المماسان المرسومان من نهايتي وتر متقاطعان

المماس عمودي على نصف القطر

المرسوم من نقطة التماس

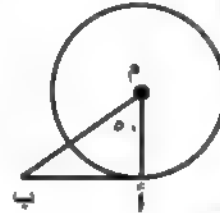


$\therefore AB$ مماس ، MA نصف قطر

$$\therefore MA \perp AB$$

$$\therefore \angle MAB = 90^\circ$$

تدريب



في الشكل المقابل:

AB مماس للدائرة

أوجد $\angle B$

الحل

مثال ٢

AB مماس للدائرة عند A

$$MA = 8 \text{ سم}$$

$$\angle B = 30^\circ$$

أوجد طول كل من AB ، AC

الحل

$\therefore AB$ مماس $\therefore MA \perp AB$ $\therefore \triangle MAB$ قائم

$$\therefore \angle B = 30^\circ \therefore MB = 16 \text{ سم} \quad \because MB = 2 \times MA = 2 \times 8$$

من فيثاغورث: في $\triangle MAB$

$$AB^2 = MB^2 - MA^2 = 16^2 - 8^2 = 192 \therefore AB = \sqrt{192}$$

في $\triangle ABC$: $\therefore AC$ هو الضلع المقابل للزاوية 30°

$$\therefore AC = \frac{1}{2} MB = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

ملحوظة: يمكن حساب AC باستخدام نظرية اقليدس

مثال ١

AD مماس للدائرة عند D

H منتصف BC

$$\angle A = 56^\circ$$

أوجد $\angle DMC$

الحل

$\therefore AD$ مماس ، MD نصف قطر $\therefore MD \perp AD$

$$\therefore \angle ADM = 90^\circ$$

$\therefore H$ منتصف BC $\therefore MH \perp BC$

$$\therefore \angle DMC = 90^\circ$$

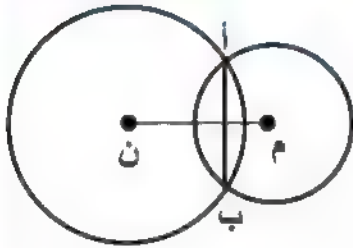
\therefore مجموع قياسات الشكل الرباعي $MDCH = 360^\circ$

$$\therefore \angle DMC = 360 - (90 + 90 + 56) = 124^\circ$$

$$= 124^\circ = 360 - 236$$

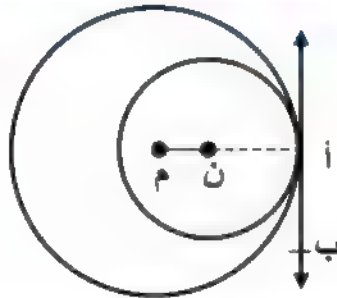
إذا كانت م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما نق_١ ، نق_٢ ، م ن خط المراكز فإن الدائرتان تكونان :

٣ متقاطعتان



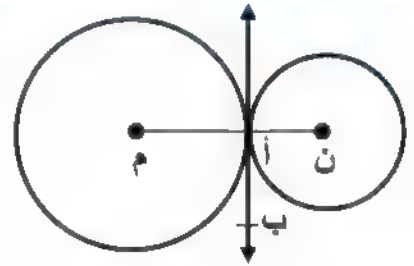
- * نق_١ - نق_٢ > م ن > نق_١ + نق_٢
- * الطرح > م ن > المجموع
- * الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }
- * أ ب يسمى وتر مشترك

٢ متماستان من الداخل



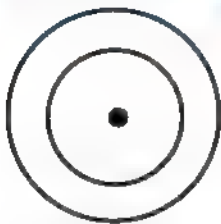
- * إذا كان : م ن = نق_١ - نق_٢
- * م ن = الطرح
- * الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }
- * سطح م ∩ سطح ن = سطح ن
- * أ ب يسمى مماس مشترك

١ متماستان من الخارج



- * إذا كان : م ن = نق_١ + نق_٢
- * م ن = المجموع
- * الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }
- * سطح م ∩ سطح ن = { أ }
- * أ ب يسمى مماس مشترك

٦ متحدة المركز



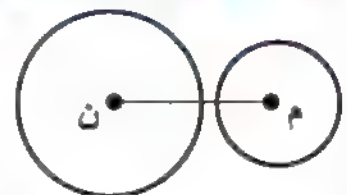
- * إذا كان : م ن = صفر
- * الدائرة م ∩ الدائرة ن =
- * سطح م ∩ سطح ن = سطح م

٥ متداخلتان



- * م ن > نق_١ - نق_٢
- * م ن > الطرح
- * الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅
- * سطح م ∩ سطح ن = سطح م

٤ متباعدتان



- * إذا كان : م ن < نق_١ + نق_٢
- * م ن < المجموع
- * الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅
- * سطح م ∩ سطح ن = ∅

ملحوظة : عشان قحود وضع الدائرتان اجمع نق_١ + نق_٢ واطوح نق_١ - نق_٢ وقاوفهم بخط الموكزين

تدريب

م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

٣- م ن = ٣ سم
الدائرتان

٢- م ن = ٤ سم
الدائرتان

١- م ن = ١٤ سم
الدائرتان

٦- م ن = ٧ سم
الدائرتان

٥- م ن = صفر
الدائرتان

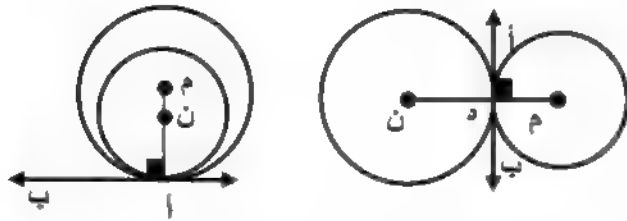
٤- م ن = ١٦ سم
الدائرتان

نتائج هامة على خط المركزين



في الدائرتان المتماستان

خط المركزين عمودي على المماس المشترك

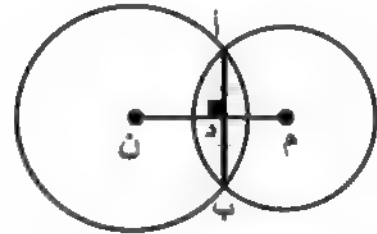


∴ \overline{AB} مماس مشترك ، M ، N خط المركزين
 ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ∴ $\angle (M \hat{A} N) = 90^\circ$



في الدائرتان المتقاطعتان

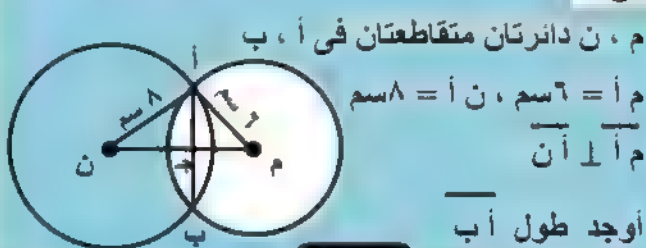
خط المركزين عمودي على الوتر المشترك وينصفه



∴ \overline{AB} وتر مشترك ، M ، N خط المركزين
 ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ ∴ $\angle (M \hat{D} N) = 90^\circ$
 ، M ، N ينصف \overline{AB} ∴ $AD = DB$

نص محوود عوض معلم اول رياضيات *

مثال ٢



الحل

في $\triangle AMN$ (من فيثاغورث) :

$$\overline{MA} \perp \overline{MN} \therefore (MN)^2 = MA^2 + AN^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$\therefore MN = 10 \text{ سم}$$

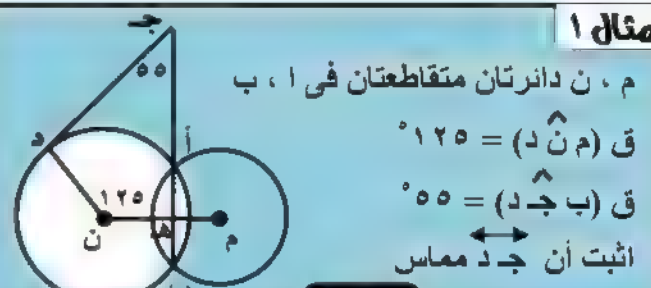
∴ \overline{AB} وتر مشترك ∴ M ، N \perp \overline{AB}

$$\text{من إقليدس : } AD = \frac{AM \times AN}{MN} = \frac{6 \times 8}{10} = 4,8 \text{ سم}$$

∴ \overline{AB} وتر مشترك ∴ M ، N ينصف \overline{AB}

$$\therefore \overline{AB} = 4,8 \times 2 = 9,6 \text{ سم}$$

مثال ١



الحل

∴ \overline{AB} وتر مشترك ، M ، N خط المركزين

∴ $\overline{AB} \perp \overline{MN}$ ∴ $\angle (A \hat{H} N) = 90^\circ$

∴ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

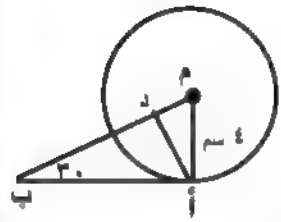
$$\therefore \angle (A \hat{D} N) = (90 + 55 + 125) - 360 = 90^\circ$$

∴ $\overline{ND} \perp \overline{AD}$

∴ \overline{AD} مماس

(وهو المطلوب اثباته)

تدريبات



أكمل :

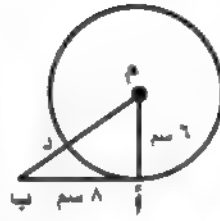
$$\widehat{Q(MAB)} = \dots\dots\dots$$

$$MB = \dots\dots\dots \text{سم}$$

$$AB = \dots\dots\dots \text{سم}$$

$$\widehat{Q(M)} = \dots\dots\dots$$

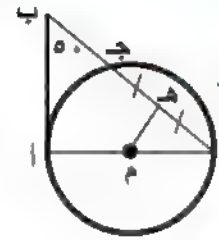
$$AD = \dots\dots\dots \text{سم}$$



أب مماس

أوجد طول د ب

الحل

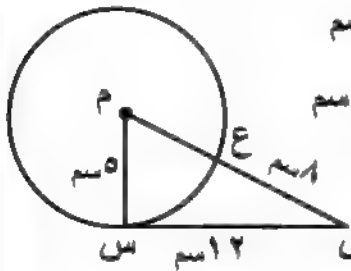


أب مماس ، د أ قطر
هـ منتصف ج د

$$\widehat{Q(B)} = 50^\circ$$

أوجد : ق (أ م هـ)

الحل

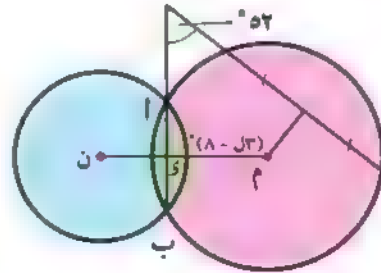


م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

$$\text{ص ع} = ٨ \text{ سم} ، \text{ص س} = ١٢ \text{ سم}$$

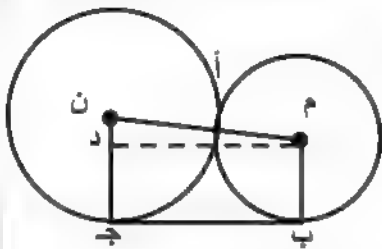
اثبت أن س ص مماس

الحل



أوجد قيمة ل

الحل



م ، ن دائرتان متماستان

ب ج مماس مشترك

$$MB = ٥ \text{ سم} ، ND = ٨ \text{ سم}$$

أوجد طول ب ج

الحل

العمل : نرسم $MD \perp ND$

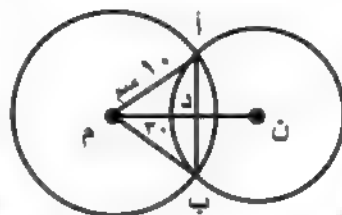
ب ج مماس مشترك $\therefore MB \perp AB ، ND \perp AB$

\therefore الشكل م ب ج د مستطيل

$$\therefore MD = MB = ٥ \text{ سم} \therefore ND = ٨ - ٥ = ٣ \text{ سم}$$

$$MN = ٨ + ٥ = ١٣ \text{ سم} \text{ ومن فيثاغورث في } \triangle MND :$$

$$(MD)^2 = 169 - 9 = 160 \therefore MD = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} ، \text{ ب ج} = 4\sqrt{10}$$



م ، ن دائرتان متقاطعتان

$$MA = ١٠ \text{ سم}$$

$$\widehat{Q(MN)} = 30^\circ$$

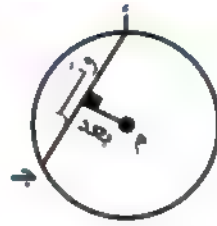
أوجد طول أ ب

الحل

العلاقة بين الأوتار والأبعاد



اعرف / فهم / عوَض

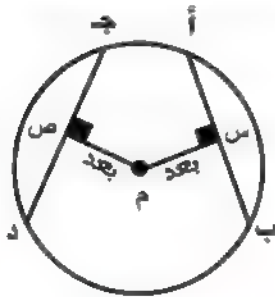


البعد لازم يكون عمودى

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودى

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

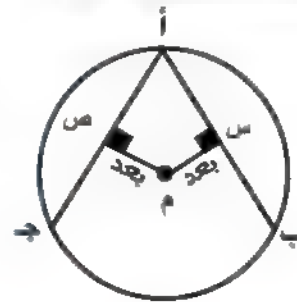
**إذا كانت الأبعاد متساوية
فإن الأوتار تكون متساوية**



$\because م ص = م ص$
(الأبعاد متساوية)
 $\therefore أ ب = ج د$
(الأوتار متساوية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

**إذا كانت الأوتار متساوية
فإن الأبعاد تكون متساوية**

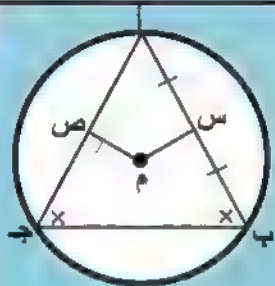


$\therefore أ ب = ج د$
(الأوتار متساوية)
 $\therefore م ص = م ص$
(الأبعاد متساوية)

لو عطالك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.

ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.

مثال ٢



أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة م
ق (ب) = ق (جـ) $\hat{=}$
س منتصف أ ب ، م ص \perp أ جـ
اثبت أن : م ص = م س

الحل

\because س منتصف أ ب \therefore م س \perp أ ب

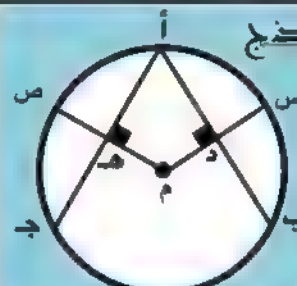
في Δ أ ب جـ :

\because ق (ب) = ق (جـ) $\hat{=}$
 \therefore أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

\therefore م ص = م س (الأبعاد متساوية)

مثال ١

مسألة من النماذج



أ ب = أ جـ
م د \perp أ ب ، م هـ \perp أ جـ
اثبت أن : س د = س هـ

الحل

\because أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

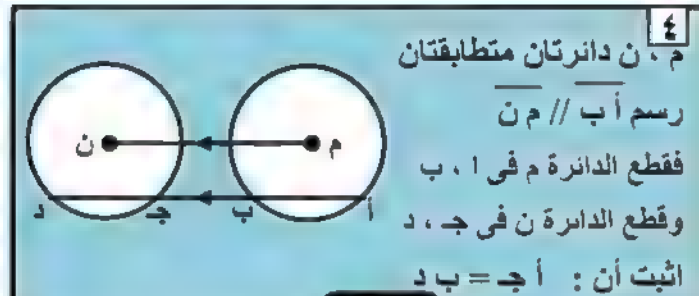
\therefore م د \perp أ ب ، م هـ \perp أ جـ

\therefore م د = م هـ (١) (الأبعاد متساوية)

\because م س = م ص (٢) (أنصاف أقطار)

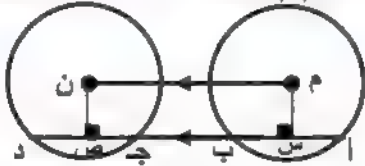
بطرح ١ من ٢ ينتج أن :

س د = س هـ



الحل

العمل: نرسم $\overline{MS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{NS} \perp \overline{CD}$



$\therefore \overline{MN} // \overline{AB}$ ، $\overline{MS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{NS} \perp \overline{CD}$

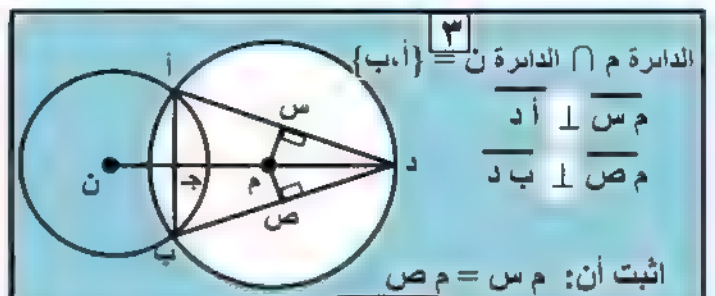
\therefore الشكل م س ص ن مستطيل

$\therefore \overline{MS} = \overline{NS}$ (أبعاد متساوية)

$\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$ (الأوتار متساوية)

بإضافة \overline{BJ} للطرفين

$\therefore \overline{AJ} = \overline{BD}$ هـ ط ث



الحل

$\therefore \overline{AB}$ وتر مشترك ، \overline{MN} خط المراكزين

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{AB}$ ، ج منتصف \overline{AB}

أي أنه في $\triangle AB$: \overline{DJ} محور تماثل \overline{AB}

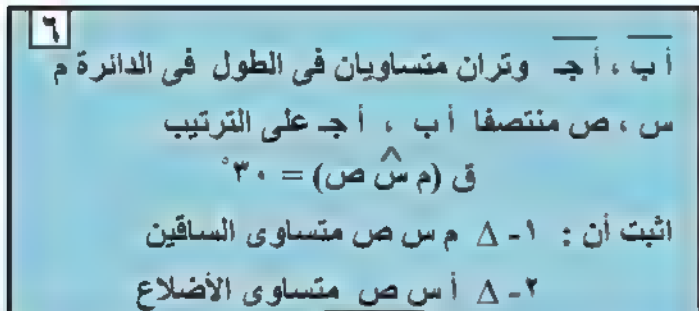
لأن $\overline{DJ} \perp \overline{AB}$ وتتصفه

$\therefore \triangle DAB$ متساوي الساقين

$\therefore \overline{DA} = \overline{DB}$ وهي أوتار متساوية

$\therefore \overline{MS} = \overline{MS}$ أبعاد متساوية

ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق $\triangle ADJ \cong \triangle BDJ$ ، ب جـ



الحل

\therefore س منتصف \overline{AB} $\therefore \overline{MS} \perp \overline{AB}$

\therefore ص منتصف \overline{AJ} $\therefore \overline{MS} \perp \overline{AJ}$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AJ}$ (أوتار متساوية)

$\therefore \overline{MS} = \overline{MS}$ (أبعاد متساوية)

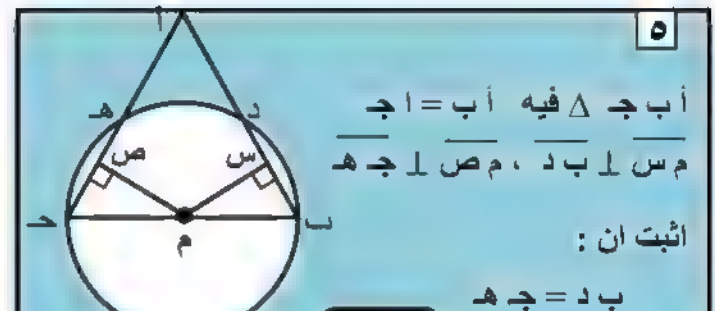
$\therefore \triangle م س ص$ متساوي الساقين

\therefore ق $(\widehat{MS}) = 30^\circ$ ، ق $(\widehat{MA}) = 90^\circ$

\therefore ق $(\widehat{AS}) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

ق $(\widehat{AS}) = 60^\circ$ ، ق $(\widehat{A}) = 60^\circ$

$\therefore \triangle أ س ص$ متساوي الأضلاع



الحل

$\triangle م س ب$ ، $\triangle م س جـ$ فيهما :

$\overline{MB} = \overline{MJ}$ أنصاف أقطار

ق $(\widehat{MS}) = \text{ق} (\widehat{M}) = \text{ق} (\widehat{MS}) = 90^\circ$

ق $(\widehat{B}) = \text{ق} (\widehat{J})$ لأن $\overline{AB} = \overline{AJ}$

$\therefore \triangle م س ب \cong \triangle م س جـ$

ومن التطابق ينتج أن : $\overline{MS} = \overline{MS}$ (أبعاد)

$\therefore \overline{MS} \perp \overline{BD}$ ، $\overline{MS} \perp \overline{AJ}$

$\therefore \overline{BD} = \overline{AJ}$

١

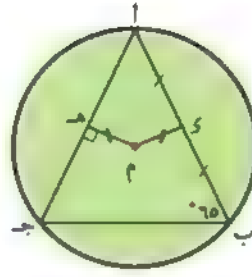
إذا كان:

$$م = ٥ م هـ$$

$$و (ب) = ٦٥^\circ$$

فاوجد

$$و (ا)$$



الحل

٢

دائرتان متحدتا المركز م

$$ق (ب) = ق (هـ)$$

اثبت أن: ج د = ع ل



الحل

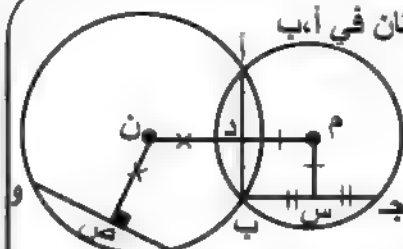
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب

س منتصف ج ب

$$م س = م د$$

$$ن ص = ن د$$

ن ص ⊥ هـ و اثبت أن: ج ب = و هـ



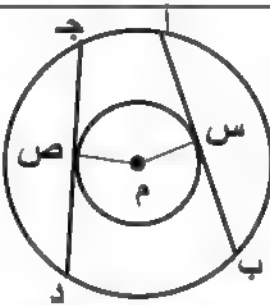
الحل

٤

دائرتان متحدتا المركز م

أ ب ، ج د مماسان للصغرى

اثبت أن: أ ب = ج د



الحل



ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଗଣତନ୍ତ୍ର !
: ଆନ୍ଧ୍ରା ପ୍ରଦେଶ :

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

◆ ممکن رسم عدد لا نهائی من الدوائر تمر بنقطتين.

◆ ولكن إذا علم طول القطعة المستقيمة أ ب وطول نصف قطر المطلوبة فإن:

- إذا كان $\text{نق} < \frac{1}{4} \text{ أب}$ فإنه يمكن رسم دائرتان فقط.
- إذا كان $\text{نق} = \frac{1}{4} \text{ أب}$ فإنه يمكن رسم دائرة واحدة فقط وهي أصغر دائرة.
- إذا كان $\text{نق} > \frac{1}{4} \text{ أب}$ فإنه لا يمكن رسم أي دائرة.

مثال: إذا كانت AB قطعة مستقيمة طولها 7 سم فإن أصغر دائرة يمكن أن تمر بالنقطتين A ، B طول نصف قطرها

◆ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة.

◆ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة وحيدة.

<p>الدائرة الداخلة للمثلث</p>  <p>مركزها هو نقطة تقاطع منصفات زواياها الداخلة</p>	<p>الدائرة الخارجة للمثلث</p>  <p>مركزها هو نقطة تقاطع <u>الأعمدة</u> المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها (مجاور تماثل أضلاعه)</p>
---	---

- ❖ يمكن رسم دائرة تمر بـ P و Q كل من : المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوي الساقين
- ❖ لا يمكن رسم دائرة تمر بـ P و Q : متوازي الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوي الساقين

تذکرہ :

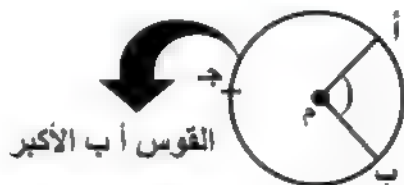
- ١) ارسم القطعة أ ب = ٤ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين أ ، ب
٢) ارسم Δ أ ب ج المتساوي الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر بركوسه ثم حدد موضع الدائرة بالنسبة لارتفاعاته.

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الصفحة
الخامسة

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

الزاوية المركزية

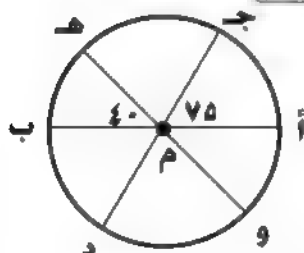


- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس AB
- القوس A ج ب يسمى AB الأكبر

قياس القوس يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له

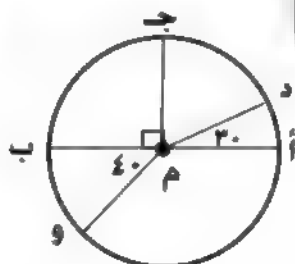
قياس القوس

تدريب



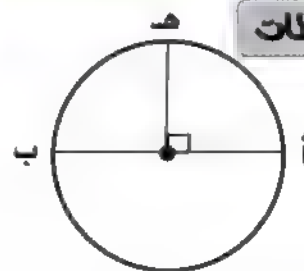
$$\begin{aligned} & \text{ق (أ ج)} = 75^\circ \\ & \text{ق (ج هـ)} = 40^\circ \\ & \text{ق (أ ج د)} = 115^\circ \\ & \text{ق (أ و هـ)} = 220^\circ \end{aligned}$$

مثال



$$\begin{aligned} & \text{ق (أ د)} = 30^\circ \\ & \text{ق (ج ب)} = 90^\circ \\ & \text{ق (د ج)} = 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ \\ & \text{ق (د ج ب)} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \\ & \text{ق (أ ب و)} = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ \end{aligned}$$

ملاحظات



- ◆ قياس الدائرة كلها = 360°
- ◆ قياس نصف الدائرة = 180°
- ◆ قياس ربع الدائرة = 90°
- ◆ قياس خمس الدائرة = $\frac{360}{5} = 72^\circ$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق}$$

طول القوس

تدريب

أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

مثال

أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{3}$ الدائرة .
ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧ سم .

الحل

$$\begin{aligned} & \text{قياس القوس الذي يمثل } \frac{1}{3} \text{ الدائرة} = \frac{360}{3} = 120^\circ \\ & \text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi \text{ نق} \\ & = \frac{120}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 14.6 \text{ سم} \end{aligned}$$

تصنيف المسائل

نتائج هامة

إذا كانت الأقواس متساوية
فإن أوتارها تكون متساوية



إذا كان ق (أب) = ق (أج)
فإن : أب = أج

مثال



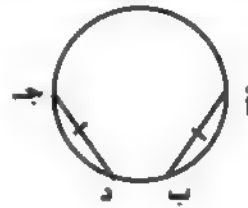
ق (أب) = ق (أج)
ق (أ) = 70
فلوجد ق (ب)

الحل

∴ ق (أب) = ق (أج) ∵ أقواس متساوية
∴ أب = أج ∵ أوتار متساوية

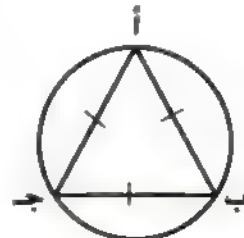
$$\therefore ق (ب) = ق (ج) = \frac{180 - 70}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

إذا كانت الأوتار متساوية
فإن أقواسها تكون متساوية



إذا كان أب = ج د
فإن : ق (أب) = ق (ج د)

مثال



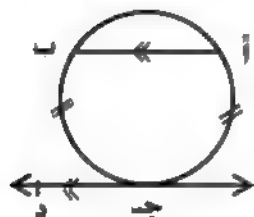
أب ج د ∆ متساوى الأضلاع
أوجد ق (أب)

الحل

∴ أب = ج د = أج ∵ أوتار متساوية
∴ ق (أب) = ق (ج د) = ق (أج) ∵ أقواس متساوية

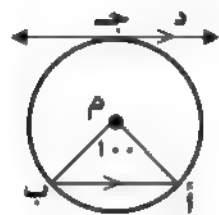
$$\therefore ق (أب) = \frac{360}{3} = 120$$

الوتر والمماس المتوازيان
يحصران قوسان متساويان



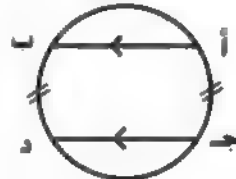
إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
فإن ق (أب) = ق (ج د)

تدريب



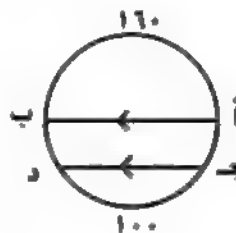
إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ق (أ ب) = 100
فإن ق (أ ج) =

الوتران المتوازيان
يحصران قوسان متساويان



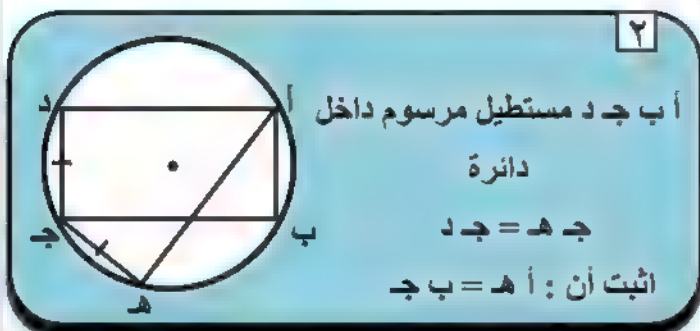
إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
فإن ق (أب) = ق (ج د)

تدريب



إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
ق (أ ب) = 160
ق (ج د) = 100
فإن ق (أ ج) =

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس



الحل

∴ $\text{أ ب} = \text{ج د}$ خواص المستطيل

، $\text{ه ج} = \text{د ج}$ (مطابق)

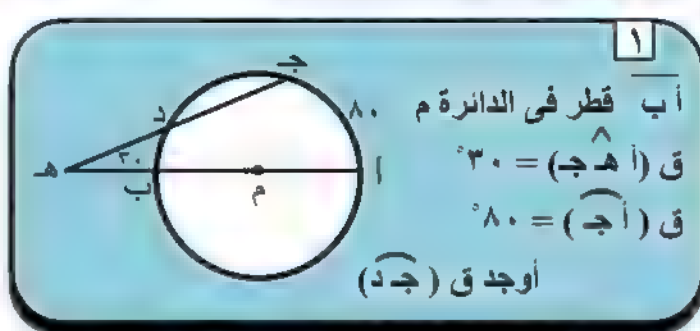
∴ $\text{أ ب} = \text{ه ج}$

∴ $\widehat{\text{ق (أ ب)}} = \widehat{\text{ق (ه ج)}}$

بإضافة $\widehat{\text{ق (ب ه)}}$ للطرفين

∴ $\widehat{\text{ق (أ ه)}} = \widehat{\text{ق (ب ج)}}$

∴ $\text{أ ه} = \text{ب ج}$ هـ طث



الحل

العمل :

نرسم م ج ، م د

∴ $\widehat{\text{ق (أ ج)}} = 80^\circ$ ∴ $\widehat{\text{ق (أ م ج)}} = 80^\circ$

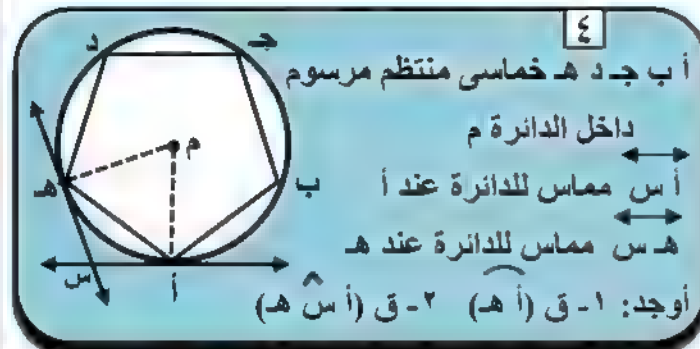
∴ $\widehat{\text{أ م ج}}$ زاوية خارجة عن $\triangle \text{ج م ه}$

∴ $\widehat{\text{ق (م ج ه)}} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$

في $\triangle \text{ج م د}$: ∴ $\text{م ج} = \text{م د}$ (أنصاف أقطار)

∴ $\widehat{\text{ق (ج م د)}} = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$

∴ $\widehat{\text{ق (ج د)}} = 80^\circ$



الحل

العمل : نرسم م أ ، م هـ

∴ أ ب ج د ه خماسي منتظم

∴ $\text{أ ب} = \text{ب ج} = \text{ج د} = \text{د ه} = \text{ه أ}$

∴ $\widehat{\text{ق (أ ب)}} = \widehat{\text{ق (ب ج)}} = \widehat{\text{ق (ج د)}} = \widehat{\text{ق (د ه)}} = \widehat{\text{ق (أ ه)}}$

∴ قياس الدائرة = 360° ∴ $\widehat{\text{ق (أ ه)}} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ أولا

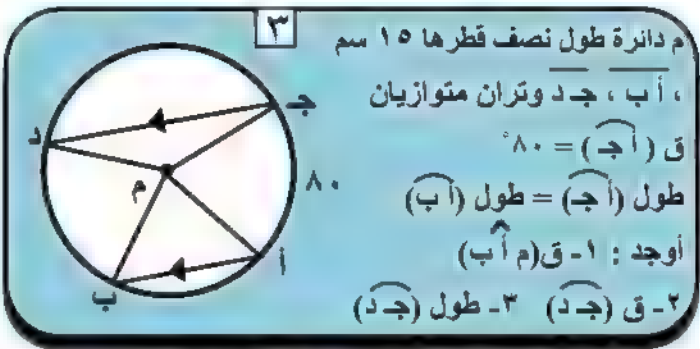
∴ $\widehat{\text{ق (أ ه)}} = 72^\circ$ ∴ $\widehat{\text{ق (أ م ه)}} = 72^\circ$

∴ $\widehat{\text{أ س}}$ مماس ∴ $\widehat{\text{ق (م أ س)}} = 90^\circ$

∴ $\widehat{\text{ه س}}$ مماس ∴ $\widehat{\text{ق (م ه س)}} = 90^\circ$

في الشكل الرباعي م أ س هـ :

∴ $\widehat{\text{ق (أ س ه)}} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 72^\circ) = 108^\circ$



الحل

∴ طول $\widehat{\text{(أ ج)}} =$ طول $\widehat{\text{(أ ب)}}$

∴ $\widehat{\text{ق (أ ج)}} = \widehat{\text{ق (أ ب)}} = 80^\circ$

∴ $\widehat{\text{ق (أ م ب)}}$ المركزية = 80°

∴ $\text{م أ} = \text{م ب}$ (أنصاف أقطار) ∴ $\triangle \text{م أ ب}$ متساوي الساقين

∴ $\widehat{\text{ق (م أ ب)}} = \widehat{\text{ق (م ب أ)}} = 50^\circ$ المطلوب الأول

∴ $\widehat{\text{أ ب}} \parallel \widehat{\text{ج د}}$ ∴ $\widehat{\text{ق (أ ج)}} = \widehat{\text{ق (ب د)}} = 80^\circ$

∴ $\widehat{\text{ق (ج د)}} = \widehat{\text{ق (أ ج)}} + \widehat{\text{ق (أ ب)}} + \widehat{\text{ق (ب د)}} = 360^\circ$

∴ $\widehat{\text{ق (ج د)}} = (80^\circ + 80^\circ + 80^\circ) - 360^\circ = 120^\circ$

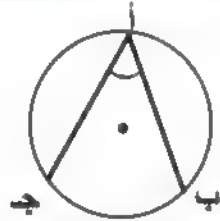
طول $\widehat{\text{ج د}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times 3.14 \times 15 = 31.4$ سم

العلاقة بين المحيطية والمركزية



هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعيها وتران

الزاوية المحيطية



- ب أ ج زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو $\widehat{ب ج}$

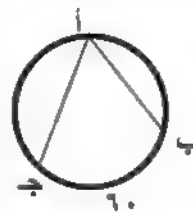
قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس
المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية المحيطية = نصف
قياس القوس المقابل لها



د أ ج ب المحيطية ، د أ م ب المركزية
مشتريكتان في $\widehat{أ ب}$

$$\therefore ق (أ ج ب) = \frac{1}{2} ق (أ م ب)$$

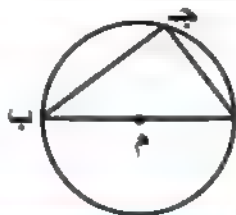


ق (ب أ ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج)

فإذا كان ق (ب ج) = 60

فإن ق (ب أ ج) = 30

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

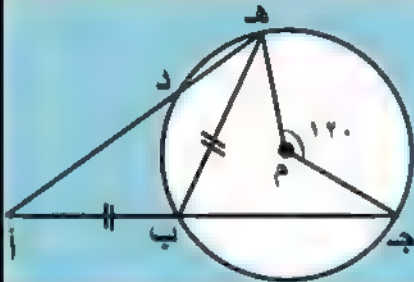


∴ $\overline{أ ب}$ قطر

∴ ق (ج) المحيطية = 90°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة

مثال ٢



ق (هـ م ج) = 120°

أ ب = ب هـ

أوجد: ق (د أ ج)

الحل

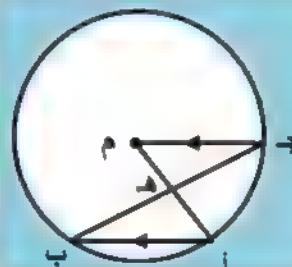
∴ ق (هـ ب ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية

لأنهما مشتركتان في $\widehat{أ ج}$ ∴ ق (هـ ب ج) = 60°

∴ أ ب = ب هـ

∴ ق (ب هـ أ) = ق (هـ أ ب) = $\frac{60}{2}$ = 30°

مثال ١



أ ب وتر في الدائرة م

ج م // أ ب

اثبت ان: ب هـ < أ هـ

الحل

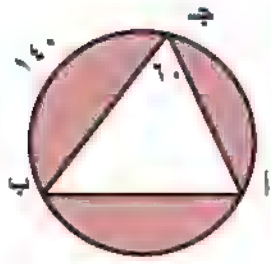
∴ ق (م) = 2 ق (ب)

مركزية ومحيطية مشتركتان في $\widehat{أ ج}$

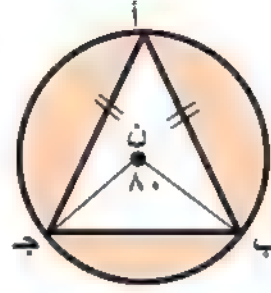
∴ ج م // أ ب ∴ ق (م) = ق (أ) بالتبادل

في $\triangle أ هـ ب$: ∴ ق (أ) = 2 ق (ب)

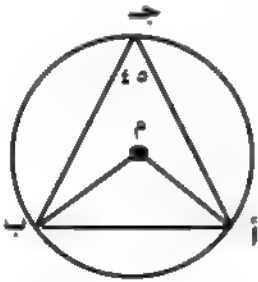
∴ ق (أ) < ق (ب) ∴ ب هـ < أ هـ



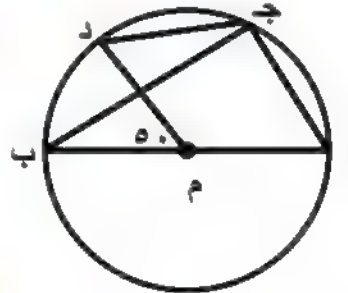
١ ق (أ) = ٦٠°
ق (ب) = ١٤٠°
أوجد ق (ج)



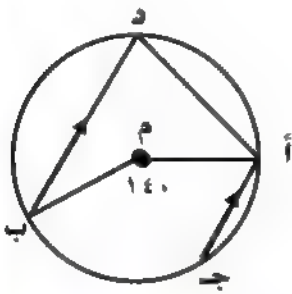
٢ ق (ب) = ٨٠°
أوجد: ١ ق (أ) = ٨٠°
٢ ق (ب) = ٨٠°



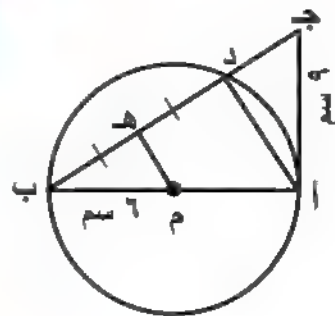
٣ ق (ج) = ٤٠°
أوجد ق (م) = ٤٠°



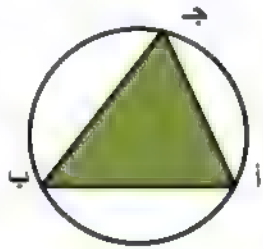
٤ ق (د) = ٥٠°
أوجد ق (أ) = ٥٠°



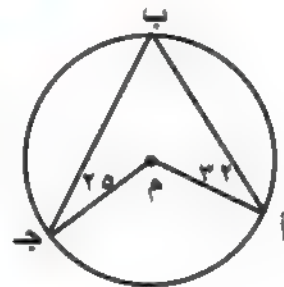
٥ ق (أ) = ١٤٠°
أوجد ق (ج) = ١٤٠°



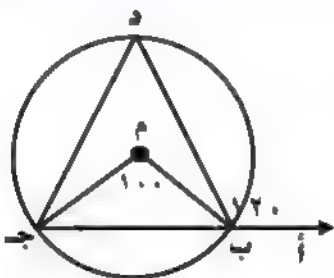
٦ ق (ب) = ٦ سم، أ ج = ٩ سم
أوجد طول كل من:
ب ج، أ د، م هـ



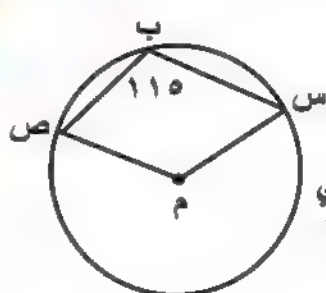
٧ ق (أ) = ٣٢°
ق (ج) = ٣٢°
أوجد: ق (أ) = ٣٢°



٨ ق (أ) = ٣٢°
ق (ج) = ٣٢°
أوجد: ق (أ) = ٣٢°

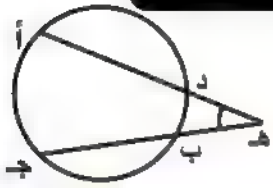


٩ ق (ب) = ١٠٠°
ق (أ) = ١٢٠°
أوجد ق (د) = ١٢٠°



١٠ ق (ب) = ١١٥°
أوجد: ق (س) = ١١٥°
عد بالك: ب محيطية تشترك معها في
القوس زاوية مركزية وهي م المنعكسة

تمرين مشهور ٢



لو تقاطع وتران خارج دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} [\widehat{B} - \widehat{C}]$$

قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

$$\widehat{B} = 2\widehat{A} + \widehat{C}$$

قياس القوس الأصغر = الأكبر - ضعف الزاوية

$$\widehat{C} = \widehat{B} - 2\widehat{A}$$

تدريب 4



اوحد قيمة ص

تدريب 3



اوحد قيمة س

تمرين مشهور ١



لو تقاطع وتران داخل دائرة

قياس زاوية التقاطع = نصف المجموع

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} [\widehat{B} + \widehat{C}]$$

قياس القوس المجهول = ضعف الزاوية - المعلوم

$$\widehat{C} = 2\widehat{A} - \widehat{B}$$

تدريب 2



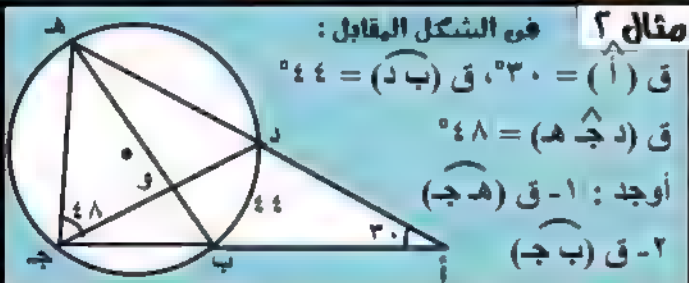
اوحد قيمة ع

تدريب 1



اوحد قيمة س

مثال ٢



في الشكل المقابل :

$$\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 44^\circ$$

$$\widehat{C} = 48^\circ$$

$$\widehat{D} = 1 - \widehat{C}$$

$$\widehat{E} = 2 - \widehat{B}$$

من تمرين مشهور ٢ :

الحل

$$\widehat{C} = 2\widehat{A} + \widehat{B}$$

$$\widehat{C} = 2 \times 30 + 44 = 104^\circ$$

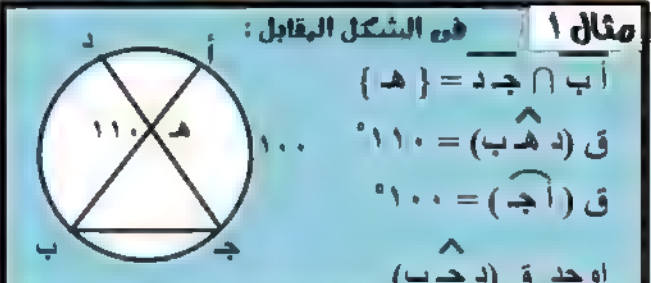
$$\widehat{D} = 48^\circ$$

$$\widehat{E} = 2 \times 48 = 96^\circ$$

$$\widehat{F} = 360^\circ$$

$$\widehat{G} = 360 - (96 + 104 + 44) = 116^\circ$$

مثال ١



في الشكل المقابل :

$$\widehat{A} = 110^\circ$$

$$\widehat{B} = 110^\circ$$

$$\widehat{C} = 100^\circ$$

$$\widehat{D} = 110^\circ$$

$$\widehat{E} = 100^\circ$$

من تمرين مشهور ١ :

الحل

$$\widehat{C} = 2\widehat{A} - \widehat{B}$$

$$\widehat{C} = 2 \times 110 - 100 = 120^\circ$$

$$\widehat{D} = \frac{1}{2} \widehat{C} = 60^\circ$$

$$\widehat{E} = 120^\circ$$

توريبات على نورين وشهيد ٢٠١

٢ في الشكل المقابل :

ق (أ) = 40°
 ق (ب ج) = ق (د هـ)
 أوجد : (١) ق (ج هـ)
 (٢) ق (ب ج)

الحل

١ في الشكل المقابل :

ق (أ) = 35°
 ق (أ هـ د) = 115°
 أوجد : ق (أ د)

الحل

٤ في الشكل المقابل :

ق (أ) = 40°
 ق (ب ج د) = 26°
 أوجد : (١) ق (ج هـ)
 (٢) ق (هـ س ج)

الحل

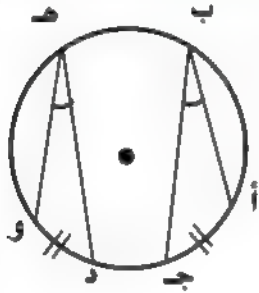
٣ في الشكل المقابل :

ق (ب و د) = 55°
 ق (أ ج) = 150°
 أوجد : (١) ق (ب د)
 (٢) ق (أ) ، ق (هـ)

الحل

الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

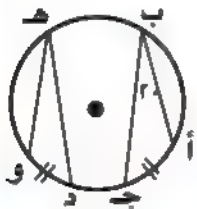
الزوايا المحيطية التي أقواسها متساوية تكون متساوية في القياس



$$\begin{aligned} \therefore \text{ق}(\widehat{أج}) &= \text{ق}(\widehat{دو}) \\ \therefore \text{ق}(\widehat{ب}) &= \text{ق}(\widehat{أ}) \\ &\text{(والعكس صحيح)} \end{aligned}$$

نص **معلم اول رياضيات**

فمثلا : في الشكل المقابل :

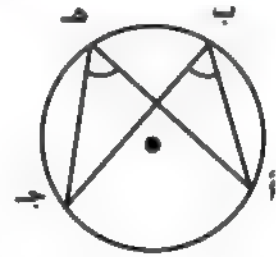


$$\therefore \text{ق}(\widehat{أبج}) = 20^\circ$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{دو}) = \dots\dots\dots$$

السبب:

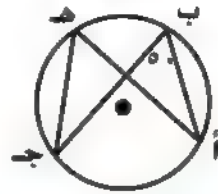
الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متساوية في القياس



$$\begin{aligned} \therefore \text{ق}(\widehat{ب}) &= \text{ق}(\widehat{أ}) \\ &\text{محيطيتان مشتركتان في القوس أ ج} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{كذلك: } \text{ق}(\widehat{أ}) &= \text{ق}(\widehat{ب}) \\ &\text{محيطيتان مشتركتان في القوس ب ه} \end{aligned}$$

فمثلا : في الشكل المقابل :



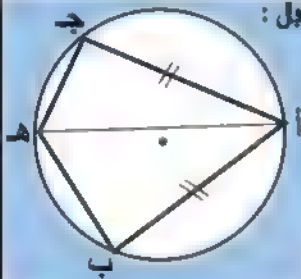
$$\therefore \text{ق}(\widehat{أبج}) = 50^\circ$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أهـج}) = \dots\dots\dots$$

السبب:

مثال ٢

في الشكل المقابل :



$$\therefore \text{أ ب} = \text{أ ج}$$

$$\therefore \text{ب ج} = \text{أ ج}$$

اثبت أن :

$$\text{ق}(\widehat{أهـب}) = \text{ق}(\widehat{أهـج})$$

الحل

$$\therefore \text{أ ب} = \text{أ ج} \quad \text{أوتار متساوية}$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أب}) = \text{ق}(\widehat{أج}) \quad \text{أقواس متساوية}$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أهـب}) = \text{ق}(\widehat{أهـج})$$

هـ ط ث

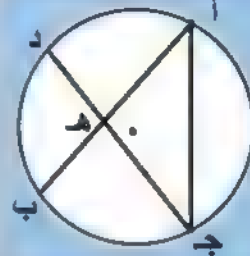
القاعدة الأولى: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية

القاعدة الثانية: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية

المرسومة عليها متساوية

مثال ١

في الشكل المقابل :



$$\text{أ ب} = \text{أ ج} \quad \text{وتران متساويان}$$

في الطول

اثبت أن :

$$\Delta \text{ أ ج هـ متساوي الساقين}$$

الحل

$$\therefore \text{أ ب} = \text{أ ج} \quad \therefore \text{ق}(\widehat{أب}) = \text{ق}(\widehat{أج})$$

ب طرح ق (د ب) من الطرفين

$$\therefore \text{ق}(\widehat{أد}) = \text{ق}(\widehat{ب ج})$$

$$\therefore \text{ق}(\widehat{ج}) = \text{ق}(\widehat{أ})$$

$$\therefore \Delta \text{ أ ج هـ متساوي الساقين}$$

٢ في الشكل المقابل :
 أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع
 مرسوم داخل دائرة
 أ د = د هـ
 أثبت أن :
 Δ أ د هـ متساوي الأضلاع

الحل

∴ Δ أ ب ج متساوي الأضلاع
 ∴ ق (ب) = ٦٠°
 ∴ ق (د) = ق (ب) = ٦٠° محيطتان مشتركتان في أ ج
 ∴ Δ أ د هـ متساوي الساقين
 ∴ ق (د أ هـ) = ق (د هـ أ) = ٦٠°
 ∴ Δ أ د هـ متساوي الأضلاع
 هـ ط ط

٤ في الشكل المقابل :
 أ د ب هـ وتران متساويان في
 الطول في الدائرة
 أ د ∩ ب هـ = { ج }
 أثبت أن : ج د = ج هـ

∴ أ د = ب هـ ∴ ق (أ د) = ق (ب هـ)
 وبإضافة ق (د هـ) للطرفين
 ∴ ق (أ هـ) = ق (ب د)
 ∴ ق (ب) = ق (أ) ∴ ج أ = ج ب
 في Δ ج أ ب :
 ∴ ج أ = ج ب ، د أ = هـ ب
 بالطرح ينتج أن : ج د = ج هـ

١ في الشكل المقابل :
 أ ب ج مثلث مرسوم
 داخل دائرة
 د هـ // ب ج
 أثبت أن :
 ق (د أ ج) = ق (ب أ هـ)

الحل

∴ د هـ // ب ج ∴ ق (د ب) = ق (هـ ج)
 ∴ ق (د أ ب) المحيطية = ق (هـ أ ج) المحيطية
 لأنهما محيطتان أقواسهما متساوية
 وبإضافة ق (ب أ ج) للطرفين
 ∴ ق (د أ ج) = ق (ب أ هـ) هـ ط ط

٣ في الشكل المقابل :
 أ ب ∩ ج د = { هـ }
 هـ أ = هـ د
 أثبت أن : هـ ب = هـ ج

∴ هـ أ = هـ د ∴ ق (أ) = ق (د)
 ∴ ق (أ) = ق (د) محيطتان مشتركتان في د ب
 ، ق (د) = ق (ب) محيطتان مشتركتان في أ ج
 ∴ ق (ج) = ق (ب)
 ∴ Δ هـ ج ب متساوي الساقين ∴ هـ ب = هـ ج

٥ في الشكل المقابل :

أب قطر في الدائرة م
 ب ه مماس للدائرة
 ق (ب ج د) = ٢٥
 أوجد بالبرهان ق (أ ه ب)

الحل

ب ه مماس ، أب قطر

$$\therefore \text{ق (ه ب أ)} = ٩٠$$

ب ق (أ) = ق (ج د) محيطتان مشتركتان في د ب

$$\therefore \text{ق (أ)} = ٢٥$$

في $\triangle \text{ه ب أ}$:

$$\text{ق (أ ه ب)} = ١٨٠ - (٢٥ + ٩٠) = ٦٥$$

٦

ق (أ) = ٤٣
 ق (ج) = ٢٠
 أوجد: ق (أ ب ه)

الحل

٧

أب ج د فيه
 أب = أ ج
 اثبت أن :
 ق (د ب) = ق (ه ج)

الحل

٨

اثبت أن :
 ق (ه ب ج) = ق (و ب د)

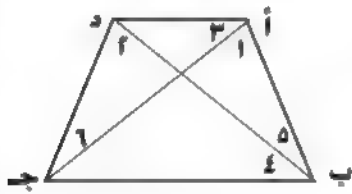
الحل

الشكل الرباعي الدائري : هو شكل رباعي تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .

أي يمكن رسم دائرة واحدة تمر برؤوسه الأربعة

لو عرفت ان الشكل رباعي دائري (سواء هو قالك في المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

أي زاويتان مرسومتان على قاعدة
واحدة وفي جهة واحدة منها
متساويتان



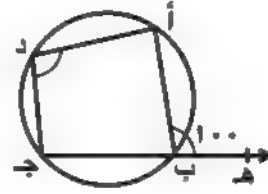
إذا كان أ ب ج د رباعي دائري فإن:

$$\text{ق (1)} = \text{ق (2)} \quad \text{مرسومتان على ب ج}$$

$$\text{ق (3)} = \text{ق (4)} \quad \text{مرسومتان على د ج}$$

$$\text{ق (5)} = \text{ق (6)} \quad \text{مرسومتان على أ د}$$

قياس الزاوية الخارجة =
قياس المقابلة للمجاورة

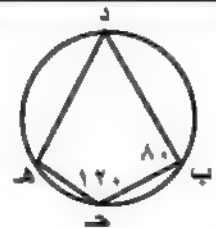


∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

$$\text{∴ ق (أ ب هـ) الخارجة} = \text{ق (د)}$$

$$\text{∴ ق (د)} = 100^\circ$$

كل زاويتان متقابلتان
مجموعهما = 180°



∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

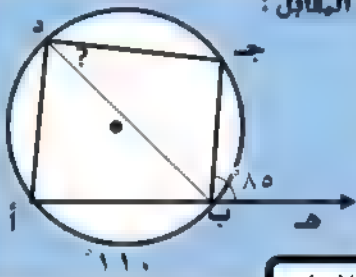
$$\text{∴ ق (ب)} + \text{ق (د)} = 180^\circ$$

$$\text{∴ ق (د)} + \text{ق (ج)} = 180^\circ$$

$$\text{∴ ق (د)} = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$\text{∴ ق (هـ)} = 180 - 80 = 100^\circ$$

مثال ٢ في الشكل المقابل :



هـ ∩ أ ب

$$\text{ق (أ ب)} = 110^\circ$$

$$\text{ق (ج ب هـ)} = 85^\circ$$

أوجد ق (ب د ج)

الحل

$$\text{∴ ق (أ ب)} = 110^\circ$$

$$\text{∴ ق (ب د أ) المحيطية} = \frac{1}{2} \text{ ق (أ ب)} = \frac{110}{2} = 55^\circ$$

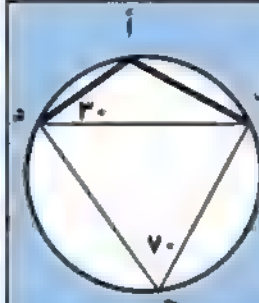
∴ ج ب هـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب ج د

$$\text{∴ ق (ج د أ)} = \text{ق (ج ب هـ)} = 85^\circ$$

$$\text{∴ ق (ب د ج)} = \text{ق (ج د أ)} - \text{ق (ب د أ)}$$

$$= 85 - 55 = 30^\circ$$

مثال ١ في الشكل المقابل :



أ ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل

دائرة ، ق (ج د) = 70° ،

$$\text{ق (أ د ب)} = 30^\circ$$

أوجد : ق (أ ب د)

الحل

∴ أ ب ج د رباعي دائري

$$\text{∴ ق (أ)} + \text{ق (ج د)} = 180^\circ$$

$$\text{∴ ق (أ)} = 180 - 70 = 110^\circ$$

في Δ أ ب د :

$$\text{ق (أ ب د)} = 180 - (30 + 110) = 40^\circ$$

٣ في الشكل المقابل :



الحل

∴ $\angle BAH$ زاوية خارجة عن الرباعي الدائري ABCD

$$\therefore \angle BAH = \angle D = 40^\circ$$

في $\triangle ADH$:

$$\angle AHD = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$$

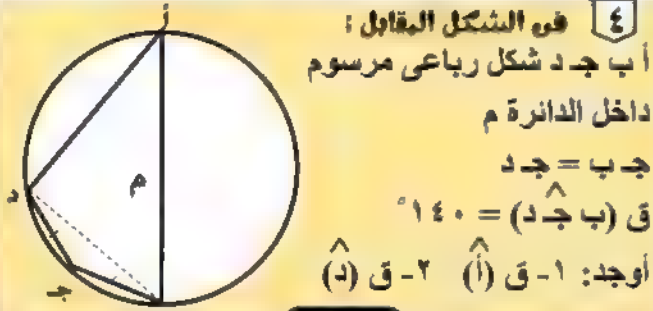
$$\therefore \angle BAH = \angle AHD = 40^\circ$$

$$\therefore \angle BAH = \angle D$$

$$\therefore \angle BAH = \angle D$$

هـ ط ث

٤ في الشكل المقابل :



الحل

العمل نرسم ب د

∴ الشكل ABCD رباعي دائري

$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

في $\triangle ABC$:

$$\therefore \angle B = 180^\circ - (140^\circ + 40^\circ) = 0^\circ$$

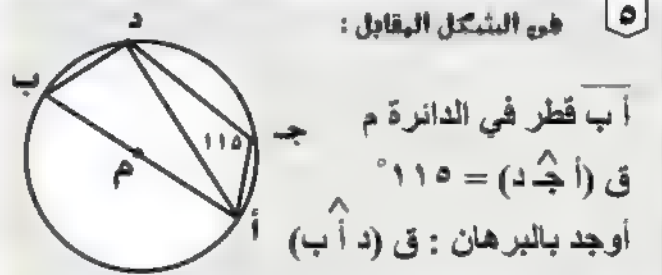
$$\therefore \angle B = 180^\circ - (140^\circ + 40^\circ) = 0^\circ$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - (140^\circ + 40^\circ) = 0^\circ$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - (140^\circ + 40^\circ) = 0^\circ$$

نص موعدها / موضوع
معلم اول رياضيات

٥ في الشكل المقابل :

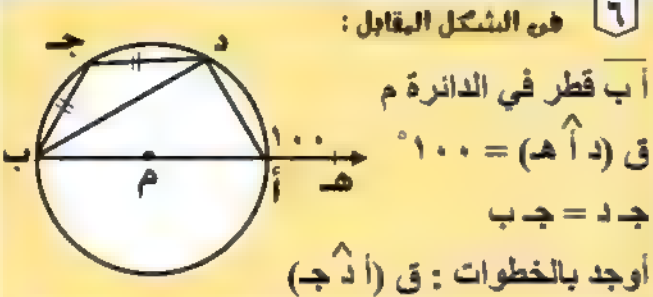


أ ب قطر في الدائرة م

$$\angle A = 115^\circ$$

أوجد بالبرهان : $\angle B = \angle D$

٦ في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م

$$\angle A = 100^\circ$$

أوجد بالخطوات : $\angle B = \angle D$

إثبات أن الشكل رباعي دائري

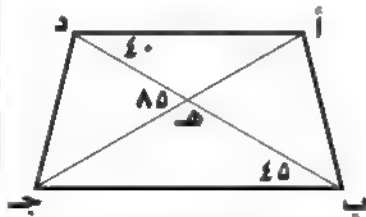


لو قالك اثبت أن الشكل رباعي دائري إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها:

زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ومتساويتان

مثال لذئذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن \triangle ه ب ج

$\therefore \angle (\text{ه ب ج}) = 85 - 45 = 40 = \angle \text{أ}$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

ومرسومتين على قاعدة واحدة

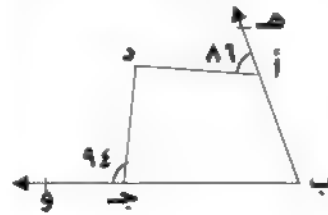
وهما ق (أ د ب) = ق (أ ج ب)

\therefore الشكل رباعي دائري

زاوية خارجة قياسها = قياس المقابلة للمجاورة

مثال لذئذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : أ ب ج د رباعي دائري



طريقة الحل

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

$\therefore \angle (\text{د ج ب}) = 180 - 94 = 86$

كده ظهر لنا زاويتين متساويتين

الخارجة = المقابلة للمجاورة

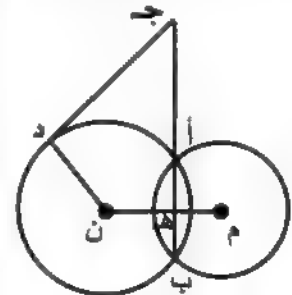
وهما ق (ه أ د) = ق (د ج ب)

\therefore الشكل رباعي دائري

زاويتان متقابلتان
واثبت أن :
مجموعهما = ١٨٠

مثال لذئذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت
أن : ج ه ن د رباعي دائري



طريقة الحل

في الشكل ج ه ن د

ق (د) = 90° عشان المماس

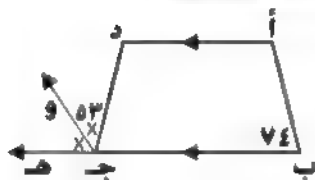
ق (ه) = 90° عشان الوتر المشترك

و الزاويتين د ، ه متقابلتين

ولو جمعناهم = 180°

\therefore الشكل رباعي دائري

حاول بنفسك



في الشكل المقابل :

أ د // ب ج

ج وينصف د ج ه

ق (د ج و) = 53°

ق (ب) = 74°

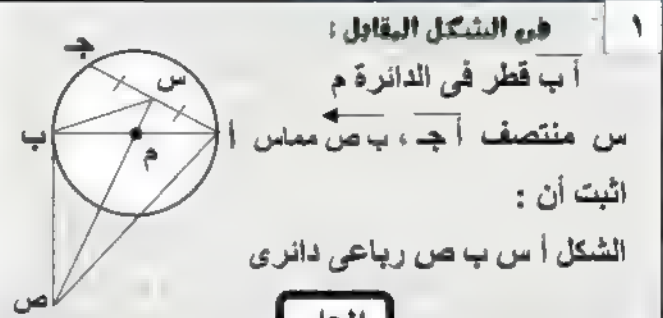
اثبت أن : أ ب ج د رباعي دائري

سؤال مهم :

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعي دائرياً ؟

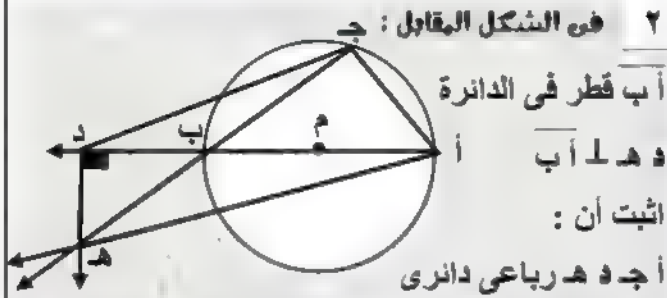
الإجابة :

- ١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان
- ٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة
- ٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها ومتساويتان



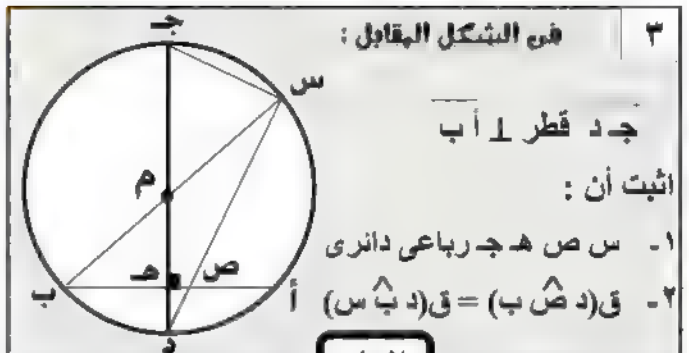
الحل

∵ س منتصف أ ج ∴ م س ⊥ أ ج
∴ ق (أ س م) = ٩٠°
∵ ب ص مماس ، أ ب قطر ∴ أ ب ⊥ ب ص
∴ ق (م ب ص) = ٩٠°
من ١ ، ٢ ينتج أن :
ق (أ س ص) = ق (أ ب ص)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي أ ص
وفي جهة واحدة منها
∴ أ س ب ص رباعي دائري



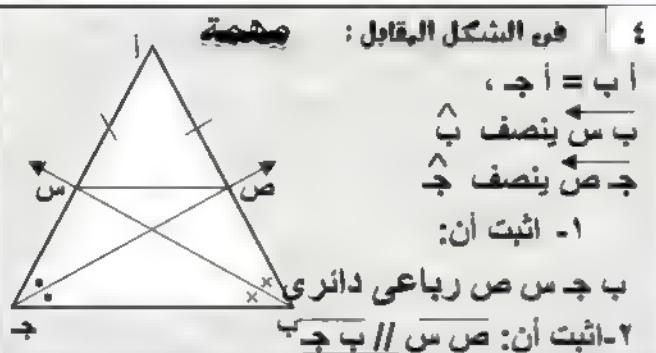
الحل

∵ د ه ⊥ أ د ∴ ق (أ د ه) = ٩٠°
∵ أ ج ب محيطية مرسومة في نصف دائرة
∴ ق (أ ج ب) = ٩٠°
من ١ ، ٢ نلاحظ : ق (أ د ه) = ق (أ ج ب)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي أ ه
وفي جهة واحدة منها
∴ الشكل أ ج د ه رباعي دائري



الحل

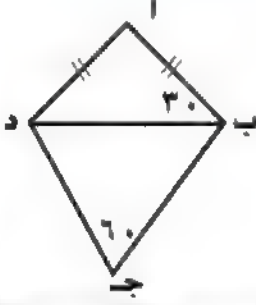
∵ ج د ⊥ أ ب ∴ ق (ج د ه ص) = ٩٠°
∴ ق (ج د س د) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة
∴ ق (ج د ه ص) + ق (ج د س د) = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)
∴ س ص ه ج رباعي دائري
∴ ق (د ص ب) = ق (ج د ه ص)
لأن قياس الزاوية الخارجة = قياس المتعلبة للمجاورة
∴ ق (د ب س) = ق (ج د ه ص)
لأنهما محيطيتان مشتركتان في س د
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (د ص ب) = ق (د ب س)



الحل

∵ أ ب = أ ج ∴ ق (ب) = ق (ج)
∴ ق (ب) = ق (ج) ∴ ق (ب) = ق (ج)
∴ ق (ص ب س) = ق (ص ج س)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة
∴ ب ج س ص رباعي دائري
∴ ب ج س ص رباعي دائري
∴ ق (أ ص س) الخارجة = ق (ج) المتعلبة للمجاورة
∴ ق (أ ص س) = ق (ب) وهما في وضع تناظر
∴ ص س // ب ج

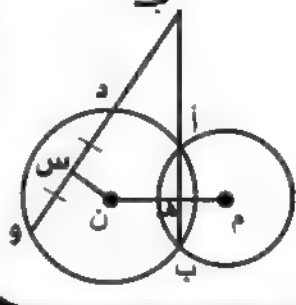
٢



أب = أ د
ق (أ ب د) = 30°
ق (ج د) = 60°
اثبت أن : الشكل
أ ب ج د رباعي دائري

الحل

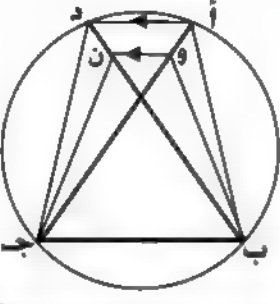
١



م ، دائرتان متقاطعتان
س منتصف د و
اثبت أن : الشكل
ج ه ن س رباعي دائري

الحل

٤



أ د // و ن
اثبت أن :
(١) ب و ن ج رباعي دائري
(٢) ق (و ب ن) = ق (و ج ن)

الحل

٣



أ س ينصف د ب أ ج
د ص ينصف د ب د ج
اثبت أن : الشكل
(١) أ س ص د رباعي دائري
(٢) س ص // ب ج

الحل

في الشكل المقابل :

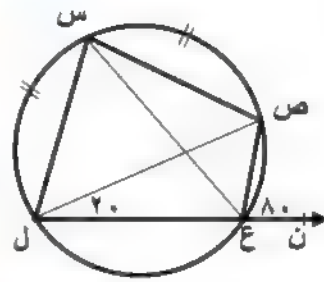
س منتصف ص ل

ق (ص ع ن) = ٨٠

ق (ص ل ع) = ٢٠

أوجد : (١) ق (ع س ل)

(٢) ق (س ص ع)



في الشكل المقابل :

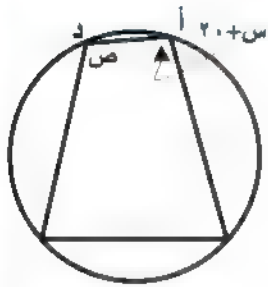
ق (ب) = ٧٠

ق (ج) = ٨٠

ق (د) = ص

ق (أ) = س + ٢٠

أوجد قيمتي س ، ص



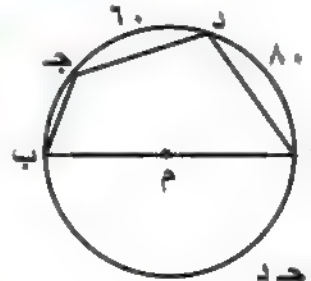
في الشكل المقابل :

أب قطر في الدائرة م

ق (أ د) = ٨٠

ق (د ج) = ٦٠

أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب ج د



في الشكل المقابل :

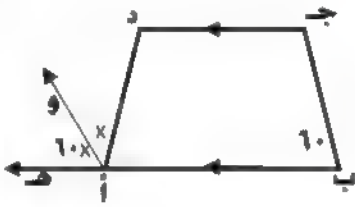
ج د // ب هـ

أو ينصف د أ هـ

ق (و أ هـ) = ٦٠

ق (ب) = ٦٠

اثبت أن : الشكل أ ب ج د رباعي دائري



في الشكل المقابل :

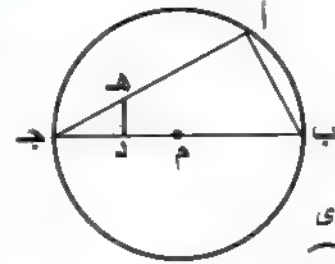
ب ج قطر في الدائرة م

هـ د ⊥ ب ج

اثبت أن :

(١) الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

(٢) ق (د هـ ج) = ١/٤ ق (أ ج)



في الشكل المقابل :

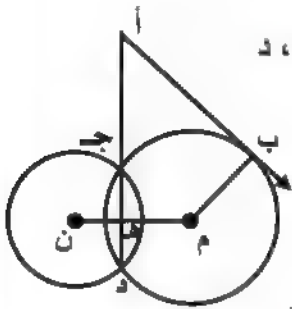
م ، ن دائرتان متقاطعتان في ج ، د

أ ب مماس للدائرة م عند ب

م ن ∩ ج د = { هـ }

اثبت أن :

الشكل أ ب م هـ رباعي دائري



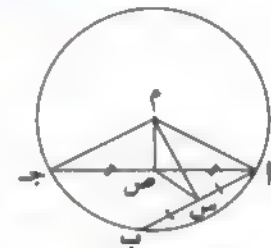
في الشكل المقابل :

س ، ص منتصفا أ ب ، أ ج

على الترتيب

اثبت أن :

أ س ص م رباعي دائري



في الشكل المقابل :

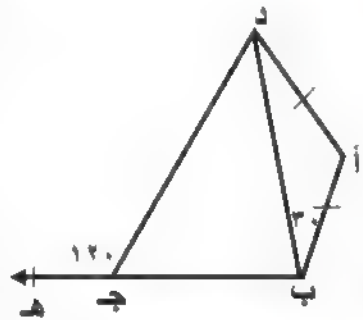
أ د = أ ب

ق (أ ب د) = ٣٠

ق (د ج هـ) = ١٢٠

اثبت أن : الشكل

أ ب ج د رباعي دائري



في الشكل المقابل :

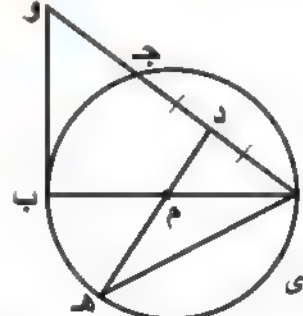
أ ب قطر في الدائرة م

د منتصف أ ج

ب و مماس

اثبت أن : (١) م ب و د رباعي دائري

(٢) ق (و) = ٢ ق (هـ)



في الشكل المقابل :

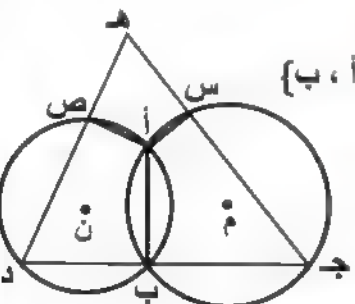
الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

ب ج د

ج س ∩ د ص = { هـ }

اثبت أن

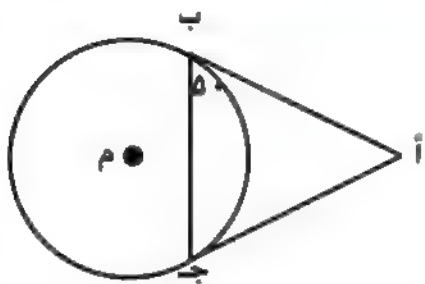
الشكل أ س هـ ص رباعي دائري



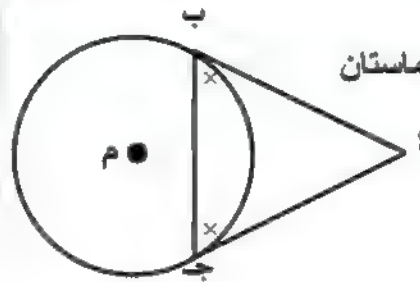
العلاقة بين مماسات الدائرة



القطعتان المماستان المرسومتان من نقطتي خارج دائرة متساويتان في الطول.



ق (أ) = = ق (ب)

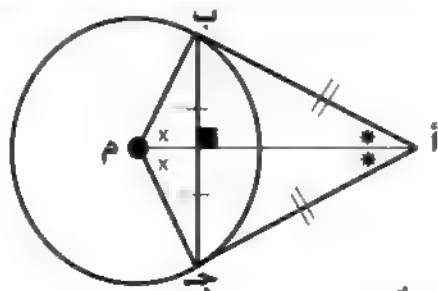


∴ \overline{AB} ، \overline{AC} قطعتان مماستان

∴ $\overline{AB} = \overline{AC}$

Δ متساوي الساقين

∴ ق (ب) = ق (أ)



◆ م أ ينصف زاوية أ

◆ م أ ينصف زاوية م

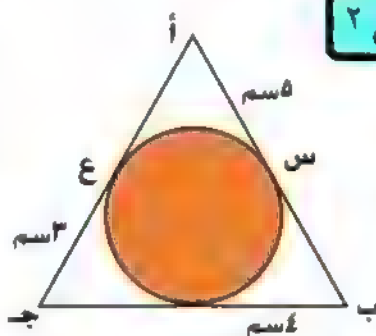
◆ م أ ينصف الوتر ب ج

◆ م أ عمودي على الوتر ب ج

أخلاصة : م أ ينصف زاويتي و وتر

تذكر

مثال ٢



Δ أ ب ج ممس الدائرة

من الخارج في س، ص، ع

أ س = ٥ سم، ب ص = ٤ سم

ج ع = ٣ سم

أوجد محيط Δ أ ب ج

الحل

أ س = أ ع = ٥ سم

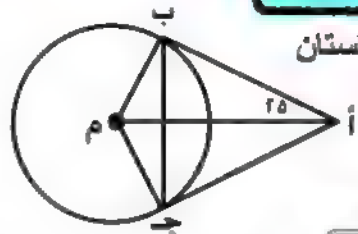
ب ص = ب ف = ٤ سم

ج ع = ج ف = ٣ سم

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم، ب ج = ٣ + ٤ = ٧ سم

أ ج = ٣ + ٥ = ٨ سم المحيط = ٨ + ٧ + ٩ = ٢٤ سم

مثال ١



أ ب، أ ج قطعتان مماستان

ق (ب أ ج) = ٢٥°

أوجد : ق (ب م ج)

الحل

∴ أ ب مماسة، ب م نصف قطر ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

في Δ أ ب م :

ق (أ م ب) = ١٨٠° - (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

∴ م أ ينصف ب ج

∴ ق (ب م ج) = ٢ × ٥٥° = ١١٠°

عدد المماسات المشتركة

◆ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل ١

◆ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤

◆ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين المركز صفر

◆ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج ٣

◆ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتان صفر

◆ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢

١ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

أ ب // ج د

ق (ب م د) = ١٣٠

١- اثبت أن: ج ب ينصف أ ج د

٢- أوجد ق (أ)

الحل

∴ ق (ب ج د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية

∴ ق (ب ج د) = ٦٥

∴ أ ب // ج د

∴ ق (أ ب ج) = ق (ب ج د) = ٦٥ بالتبادل (١)

∴ أ ب = ب ج (قطعتان مماستان)

∴ ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب) = ٦٥ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (ب ج د) = ق (أ ج ب)

∴ ج ب ينصف أ ج د

ق (أ) = ١٨٠ - (٦٥ + ٦٥) = ٥٠

٣ في الشكل المقابل:

س أ ، س ب مماسان

ق (أ س ب) = ٧٠

ق (د ج ب) = ١٢٥

اثبت أن: ١- أ ب ينصف د أ س

٢- أ د // س ب

الحل

∴ أ ب ج د رباعي دائري ∴ ق (ج د) + ق (د أ ب) = ١٨٠

∴ ق (د أ ب) = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥ (١)

∴ س أ ، س ب مماستان للدائرة ∴ س أ = س ب

∴ Δ س أ ب متساوي الساقين

∴ ق (س أ ب) = $\frac{٧٠ - ١٨٠}{٢}$ = ٥٥ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (د أ ب) = ق (س أ ب)

∴ أ ب ينصف د أ س المطلوب الأول

∴ ق (د أ س) = ٥٥ + ٥٥ = ١١٠

∴ ق (د أ س) + ق (س ب) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما متداخلتان

∴ أ د // س ب

٢ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

ق (ب م) = ٢٥

هـ ∩ ب ج الأكبر

أوجد: ١- ق (أ ج ب)

٢- ق (ب هـ ج)

الحل

∴ أ ب ، أ ج قطعتان مماستان ∴ أ م ينصف أ

∴ ق (أ) = ٢ × ٢٥ = ٥٠

فـ ٨ أ ج ب: ق (أ ج ب) = $\frac{٥٠ - ١٨٠}{٢}$ = ٦٥

∴ أ ج مماسة ، م ج نصف قطر ∴ م ج ⊥ أ ج

∴ ق (أ ج م) = ٩٠

كذلك ∴ أ ب مماسة ، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب

∴ ق (أ ب م) = ٩٠

في الشكل الرباعي أ ب م ج

ق (ج م ب) = ٣٦٠ - (٩٠ + ٩٠ + ٥٠) = ١٣٠

∴ ق (ب هـ ج) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب م ج) المركزية = ٦٥

٤ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعتان مماستان

ق (أ) = ٥٠

ق (د) = ١١٥

اثبت أن: ١- ب ج ينصف أ ب هـ

٢- ج ب = ج هـ

الحل

∴ أ ب = أ ج قطعتان مماستان

∴ ق (أ ب ج) = $\frac{٥٠ - ١٨٠}{٢}$ = ٦٥ (١)

∴ ب ج د هـ رباعي دائري

∴ ق (ج ب هـ) = ١٨٠ - ١١٥ = ٦٥ (٢)

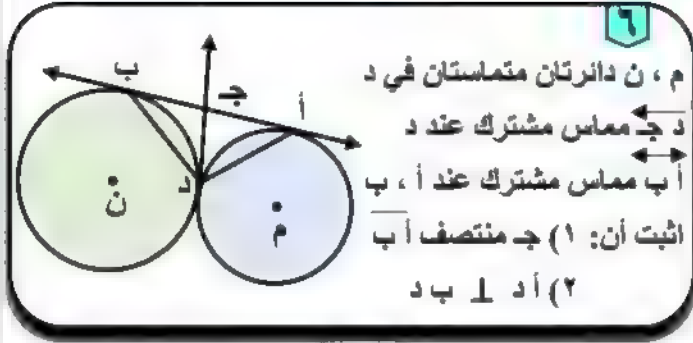
من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (أ ب ج) = ق (ج ب هـ)

∴ ب ج ينصف أ ب هـ المطلوب الأول

∴ ق (أ ب ج) المماسية = ق (ج هـ ب) المحيطية (٣)

من ٣ ، ٤ ينتج أن: ق (ج ب هـ) = ق (ج هـ ب)

∴ ج ب = ج هـ المطلوب الثاني



الحل

في الدائرة م : ج د ، ج أ : قطعتان مماستان
: ج د = ج أ (١)

في الدائرة ن : ج د ، ج ب : قطعتان مماستان
: ج د = ج ب (٢)

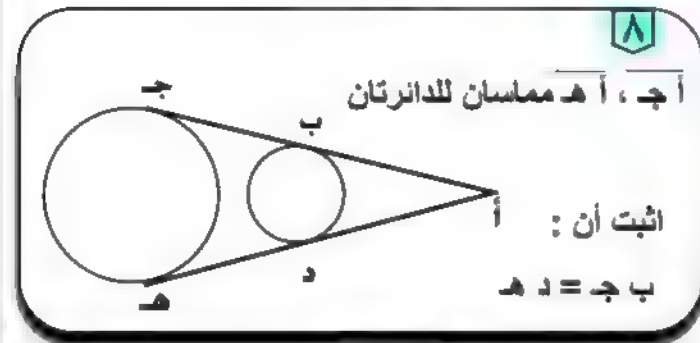
من ١ ، ٢ ينتج أن : ج أ = ج ب

: ج منتصف أ ب المطلوب الأول

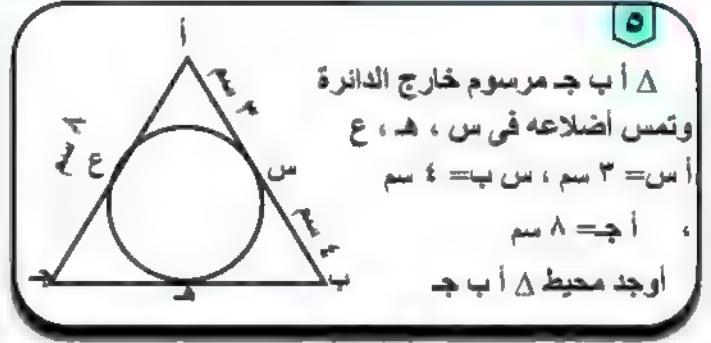
في \triangle أ د ب : : ج منتصف أ ب : د ج متوسط

: د ج = $\frac{1}{2}$ أ ب : د ج خارج من زاوية قائمة

: أ د \perp أ ب د المطلوب الثاني



الحل



الحل

: أ س = أ ع : قطعتان مماستان

: أ ع = ٣ سم

: ع ج = ٨ - ٣ = ٥ سم

: ج د = ج ه : قطعتان مماستان

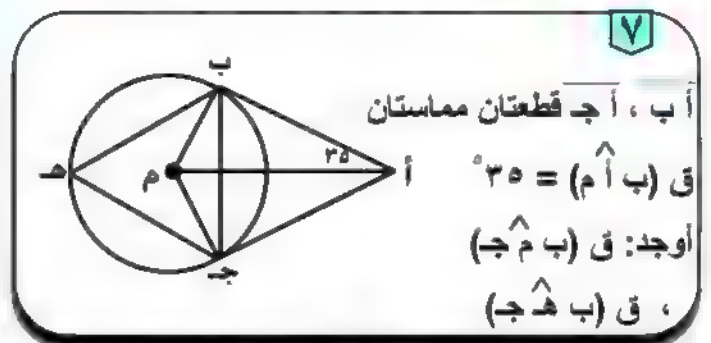
: ج ه = ٥ سم

: ب ه = ب س : قطعتان مماستان

: ب ه = ٤ سم

: ب ج = ٤ + ٥ = ٩ سم

: محيط = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم



الحل

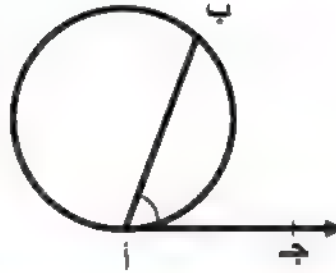


هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس

الزاوية المماسية



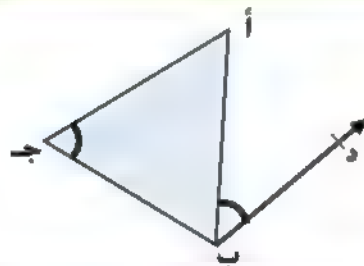
الزاوية دي ليست مماسية
تقدر تقول ليه؟



- ب أ ج زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو أ ب

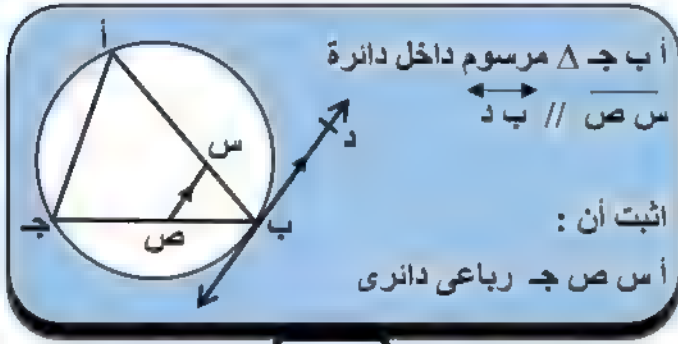
قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = نصف قياس القوس المقابل لها زى المحيطية بالظبط
<p>ق (ج أ ب) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (م) المركزية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 49°</p>	<p>ق (ج أ ب) المماسية = ق (د) المحيطية مشتركتان في ج أ ∴ ق (ج أ ب) = 65°</p>	<p>ق (أ ب ج) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج) ∴ ق (أ ب ج) = 70°</p>

لإثبات أن ب د مماس للدائرة التي تمر برؤوس \triangle أ ب ج



نثبت أن :

$$ق (أ ب د) = ق (ج د)$$



الحل

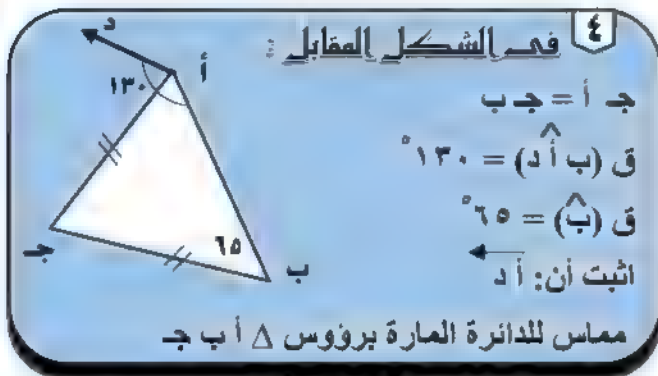
$$\therefore \overline{OS} \perp \overline{BC}$$

- ① $\angle ADB = \angle ACB$ بالتبادل
 ② $\angle ADB = \angle ACB$ المماسية = ق (ج) المحيطية

من ①، ② ينتج أن :

$$\angle ADB = \angle ACB$$

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة
 \therefore الشكل أ س ج ربعي دائري



الحل

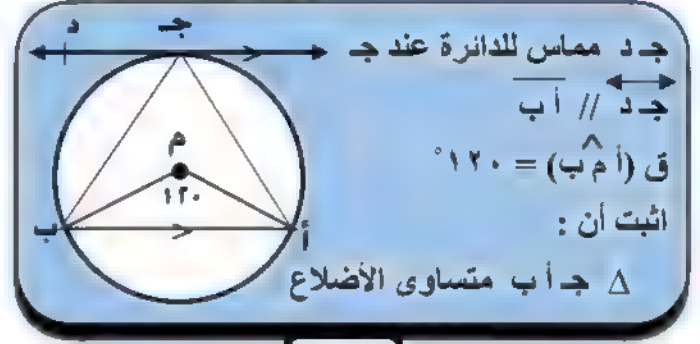
$$\therefore \angle ADB = \angle ACB$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ACB$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ACB$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ACB$$

\therefore أ د مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ج



الحل

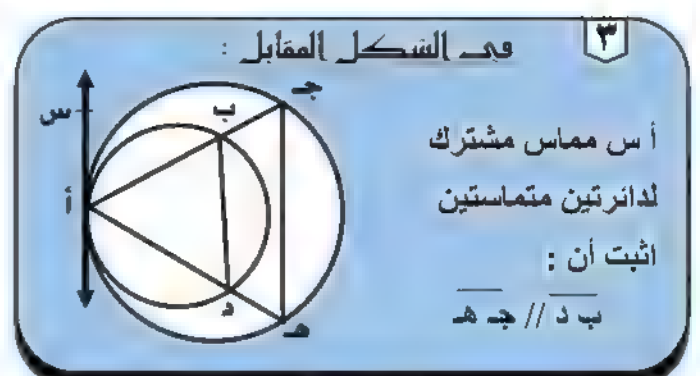
$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

- ① $\angle ADB = \angle ACB$ بالتبادل
 ② $\angle ADB = \angle ACB$ المماسية = ق (ج أ ب) المحيطية

من ①، ② ينتج أن : ق (ج أ ب) = ق (ج أ ب)

$\therefore \Delta$ ج أ ب متساوي الأضلاع

ق (م) المركزية = 120° \therefore ق (أ ج ب) = 60°
 $\therefore \Delta$ ج أ ب متساوي الأضلاع



الحل

في الدائرة الصغرى :

- ① $\angle ADB = \angle ACB$ المماسية = ق (أ د ب) المحيطية
 مشتركتان في القوس أ ب

في الدائرة الكبرى :

- ② $\angle ADB = \angle ACB$ المماسية = ق (أ هـ ج) المحيطية
 لانهما مشتركتان في القوس أ ج

من ①، ② ينتج أن :

ق (أ د ب) = ق (أ هـ ج) وهما في وضع تناظر
 $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

٢

أ ب ، أ ج قطعتان ممستان
 ب ج = ب د
 ق (أ) = 70°
 أوجد: ق (أ ب د)

الحل

١

دائرة تمس أضلاع Δ س ص ع
 في أ ، ب ، ج ، ق (ص) = 40°
 ق (ع) = 64°
 أوجد قياسات زوايا Δ أ ب ج

الحل

٤

أ ب ج Δ مرسوم داخل دائرة
 أ د مماس للدائرة
 س ص // ب ج
 اثبت أن: أ د مماس للدائرة
 المارة برؤوس Δ أ س ص

الحل

٣

أ ب ج Δ قائم في أ
 ق (د أ ب) = 60° ، أ ج = 4 سم
 ب ج = 8 سم ، اثبت أن: أ د مماس للدائرة المارة برؤوس أ ب ج

الحل

أسئلة اختر على الهندسة

- ٥ عدد محاور التماثل لأي دائرة هو
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي
- ٦ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي
- ٣ وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها سم
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٨
- ٤ إذا كان المستقيم l \cap الدائرة $m = \emptyset$ فإن المستقيم l يكون
 (أ) محور تماثل (ب) خارج (ج) قاطع (د) مماس
- ٥ إذا كان المستقيم مماساً للدائرة التي قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها سم
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨
- ٦ دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم l يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم l يكون
 (أ) مماس للدائرة (ب) قاطع للدائرة (ج) خارج الدائرة (د) قطر في الدائرة
- ٧ خط المراكزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على وينصفه
 (أ) القطر (ب) الوتر (ج) الوتر المشترك (د) المماس
- ٨ دائرتان m ، n مماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن $m = n$ سم
 (أ) ١٤ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٩
- ٩ m ، n دائرتان متقاطعتان وطولان نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن $m = n$
 (أ) [٧ ، ٣] (ب) [٧ ، ٣] (ج) [٧ ، ٣] (د) [٧ ، ٣]
- ١٠ إذا كان سطح الدائرة m \cap سطح الدائرة $n = \{ أ \}$ وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، $m = n = ٨$ سم
 فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
 (أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ١١ (د) ١٦
- ١١ إذا كان الدائرتان m ، n مماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، $m = n = ٩$ سم
 فإن طول نصف قطر الأخرى = سم
 (أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ١٤
- ١٢ m دائرة طول قطرها ٧ سم ، $أ$ نقطة في مستوى الدائرة وكان $m = ٤$ سم فإن $أ$ تقع
 (أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (ج) على الدائرة (د) على مركز الدائرة

١٣ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

١٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

- (أ) المثلث (ب) المربع (ج) المعين (د) المستطيل

١٥ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس

- (أ) معين (ب) مستطيل (ج) شبه منحرف (د) متوازي أضلاع

١٦ مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

١٧ مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

- (أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث (ج) محاور تماثل أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

١٨ قياس القوس الذي يمثل ثلث قياس الدائرة =

- (أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ٩٠

١٩ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس =

- (أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (ج) ١ : ٢ (د) ١ : ٣

٢٠ طول نصف الدائرة التي طول نصف قطرها π سم = سم

- (أ) 2π نق (ب) $\frac{1}{4}\pi$ نق (ج) $\frac{1}{3}\pi$ نق (د) π نق

٢١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة =

- (أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٢٢ أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه ق (أ) = ٦٠° فإن ق (ج) =

- (أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

٢٣ إذا كان الشكل أ ب ج د رباعي دائري وكان ق (أ) = $\frac{1}{4}$ ق (ج) فإن ق (أ) =

- (أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٢٤ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماسكتين من الخارج =

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٢٥ المماسان المرسومان من نهايتي قطر في دائرة يكونان

- (أ) متوازيان (ب) منطبقان (ج) متقاطعان (د) متساويان في الطول

٦٦ الزاوية المحاسية هي زاوية محصورة بين

- (أ) وتران (ب) مماسان (ج) وتر ومماس (د) وتر وقطر

٦٧ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

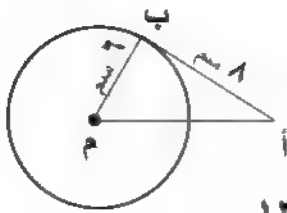
٦٨ الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر في الدائرة تكون

- (أ) منعكسة (ب) قائمة (ج) منفرجة (د) حادة

٦٩ الشكل الرباعي الدائري في الأشكال التالية هو

- (أ) المعين (ب) المستطيل (ج) متوازي الأضلاع (د) شبه المنحرف

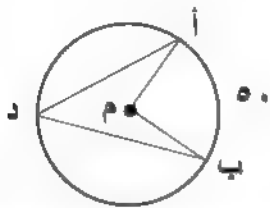
أسئلة اختر على الرسومات



١ في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة م

م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = سم

- (أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٣



٢ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

إذا كان ق (أ ب) = ٥٠° فإن ق (أ د ب) =

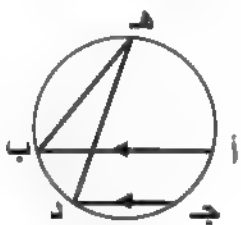
- (أ) ٢٥° (ب) ٥٠° (ج) ١٠٠° (د) ١٥٠°



٣ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

ق (م أ ب) = ٥٠° فإن ق (ج) =

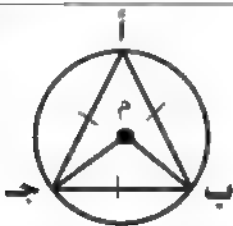
- (أ) ٥٠° (ب) ٨٠° (ج) ٤٠° (د) ٣٠°



٤ في الشكل المقابل : أ ب // ج د

ق (أ ج) = ٣٠° فإن ق (ب هـ د) =

- (أ) ١٠° (ب) ١٥° (ج) ٣٠° (د) ٦٠°



٥ في الشكل المقابل : أ ب ج د متساوي الأضلاع

فإن ق (ب م ج) =

- (أ) ٥٠° (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٠٠°

اختر تراكمي

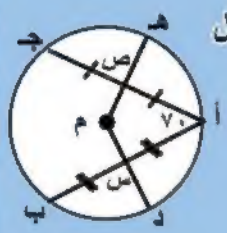
- ١ مساحة المعين الذي طولاً قطريه ٦ سم ، ٨ سم = سم ٢
الحل: مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولاً قطريه = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ سم ٢
- ٢ مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث طول الضلع الثالث
- ٣ فى المثلث أ ب ج إذا كان (أ ج) ٢ = (أ ب) ٢ + (ب ج) ٢ فإن زاوية ب تكون
- ٤ فى المثلث أ ب ج إذا كان (أ ج) ٢ < (أ ب) ٢ + (ب ج) ٢ فإن زاوية ب تكون
- ٥ فى المثلث أ ب ج إذا كان (أ ج) ٢ < (أ ب) ٢ + (ب ج) ٢ فإن زاوية ب تكون
- ٦ قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم =
- ٧ عدد محاور تماثل المربع = ، عدد محاور تماثل المستطيل =
- ٨ ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س - ٤ ص + ١٢ = ٠ هو
- ٩ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات =
- ١٥ عدد محاور تماثل نصف الدائرة عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين
- ١٥ القطران المتساويان فى الطول وغير متعامدان فى
- ١٢ مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته = سم ٢
- ١٣ إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، - ٥) ، ب (١ ، ٥) فإن مركز الدائرة م هو
- ١٤ دائرة محيطها ٨ π فإن طول قطرها =
- ١٥ فى المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى
- ١٦ فى المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى
- ١٧ عدد المستطيلات فى الشكل المقابل

--	--	--

انتهت المذكرة مع تمنياتى الخالصة لكم بالنجاح والنجاح والاستمرار فى النجاح



٢



أ ب ، أ د وتران متساويان في الطول
س منتصف أ ب ، س منتصف أ ج
ق (ج أ ب) = 70°
١- أوجد ق (د م هـ)
٢- أثبت أن س د = ص هـ

الحل

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب
∴ ق (م س أ) = 90°

∵ ص منتصف أ ج ∴ م ص ⊥ أ ج
∴ ق (م ص أ) = 90°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ س م ص = 360°
∴ ق (د م هـ) = $(70 + 90 + 90) - 360 = 110^\circ$

∵ أ ج = أ ب (أوتار متساوية)

∴ م ص = م س (أبعاد متساوية) ← ١

∴ م هـ = م د (أنصاف أقطار) ← ٢

ب طرح ١ من ٢ ينتج: ص هـ = س د المطلوب الثاني

٤



ج منتصف أ ب
ق (م أ ب) = 20°
أوجد: ق (ب هـ د) ، ق (أ د ب)

الحل

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ Δ م أ ب متساوي الساقين ∴ ق (م ب أ) = 20°

∵ ج منتصف أ ب ∴ م ج ⊥ أ ب ∴ ق (م ج ب) = 90°

في Δ م ج ب: ق (ج م ب) = $180 - (20 + 90) = 70^\circ$

∴ ق (ب هـ د) = $\frac{1}{2}$ ق (د م ب)

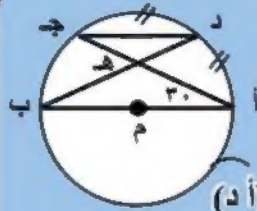
محيطية ومركزية مشتركتان في أ ب

∴ ق (ب هـ د) = 35° المطلوب الأول

في Δ أ م ب: ق (أ م ب) = $180 - (20 + 20) = 140^\circ$

∴ ق (أ د ب) = ق (أ م ب) المركزية = 140°

١



أ ب قطر في الدائرة م
ق (ج أ ب) = 30°
د منتصف أ ج
١- أوجد ق (ب د ج) ، ق (أ د)
٢- أثبت أن: أ ب // ج د

الحل



∴ ق (ب د ج) = ق (ج أ ب)

محيطيتان مشتركتان في ج ب

∴ ق (ب د ج) = 30° أولاً

∴ ق (ج ب) = $30 \times 2 = 60^\circ$

∴ ق (أ د ج) + ق (ج ب) = 180°

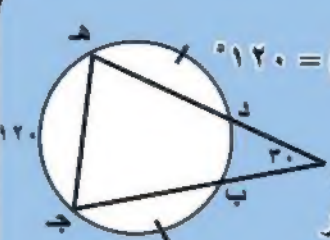
∴ ق (أ د ج) = $180 - 60 = 120^\circ$

∴ ق (أ د) = ق (د ج) ∴ ق (أ د) = $\frac{120}{2} = 60^\circ$

∴ ق (د ب أ) المحيطة = $\frac{60}{2} = 30^\circ$

∴ ق (ب د ج) = ق (د ب أ) وهما متبادلتان ∴ أ ب // ج د

٣



ق (أ) = 30° ، ق (هـ ج) = 120°
ق (ب ج) = ق (د هـ)
١- أوجد: ق (ب د) الأصغر
٢- أثبت أن: أ ب = أ د

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق (ب د) = ق (هـ ج) - ق (أ) = $120 - 30 = 90^\circ$

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) بإضافة د ب للطرفين

∴ ق (ب د هـ) = ق (د ب ج)

∴ ق (ج هـ) المحيطة = ق (هـ د) المحيطة

∴ أ ج = أ هـ ← ١

∴ ق (د هـ) = ق (ب ج) ∴ د هـ = ب ج ← ٢

ب طرح ٢ من ١ ينتج أن: أ ب = أ د



٦

أ و مماس للدائرة عند أ
أو // د ه
برهن أن :
د ه ب ج شكل رباعي دائري

الحل

١. أ و // د ه
٢. ق (و أ ب) = ق (أ ه د) بالتبادل
٣. ق (و أ ب) المماسية = ق (ج د) المحيطة
من ١، ٢ ينتج أن :
ق (أ ه د) = ق (ج د)

ونلاحظ أن أ ه د زاوية خارجة ، ج ه هي المقابلة للمجاورة

∴ الشكل د ه ب ج رباعي دائري

٥

أ ب ج د شكل رباعي فيه
أ ب = أ د
ق (أ ب د) = ٣٠° ، ق (ج د) = ٦٠°
اثبت أن : الشكل أ ب ج د رباعي دائري

الحل

١. أ ب = أ د ∴ ∆ أ ب د متساوي الساقين
٢. ق (أ ب د) = ٣٠°
٣. ق (أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°
٤. ق (أ) + ق (ج د) = ١٨٠° = ١٢٠° + ٦٠°
وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان
∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٨

ب ج مماس للدائرة عند ب
ه منتصف ب و
اثبت أن :
أ ب ج د رباعي دائري

الحل

١. ق (ب ه) = ق (ه و)
٢. ق (ب أ ه) = ق (ه أ و)
٣. ق (ب أ ه) المحيطة = ق (ج ب ه) المماسية
من ١، ٢ ينتج أن :
ق (ج ب ه) = ق (ه أ و)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهي ج د
وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

٧

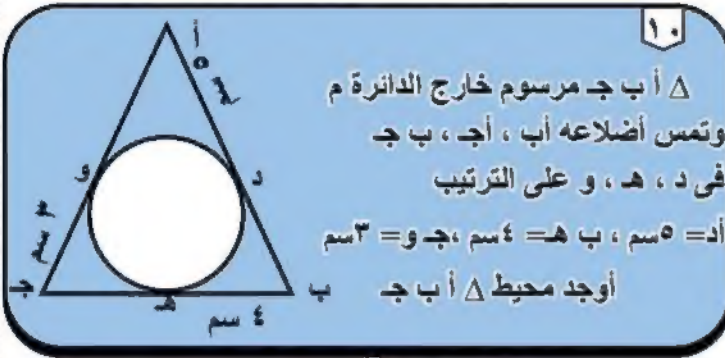
أ ب ج د مثلث مرسوم داخل دائرة
د ب مماس للدائرة عند ب
س ص // ب د
اثبت أن :
أ س ص ج رباعي دائري

الحل

١. س ص // ب د
٢. ق (أ ب د) = ق (ص س ب) بالتبادل
٣. ق (أ ب د) المماسية = ق (ج د) المحيطة
من ١، ٢ ينتج أن :
ق (ص س ب) = ق (ج د)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

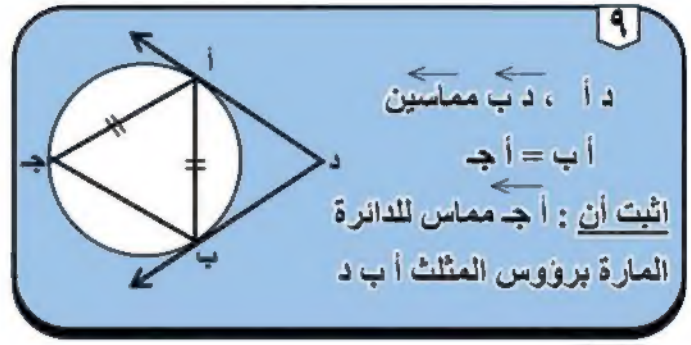
∴ الشكل أ س ص ج رباعي دائري



الحل

∴ $أد$ ، $أو$ قطعتان مماستان ∴ $أد = أو = ٥$ سم
 ∴ $ب د$ ، $ب هـ$ قطعتان مماستان ∴ $ب د = ب هـ = ٤$ سم
 ∴ $ج د$ ، $ج و$ قطعتان مماستان ∴ $ج د = ج و = ٣$ سم
 ∴ $أ ب = ٥ + ٤ = ٩$ سم ، $أ ج = ٥ + ٣ = ٨$ سم
 ∴ $ب ج = ٤ + ٣ = ٧$ سم
 ∴ محيط Δ أ ب ج = $٩ + ٨ + ٧ = ٢٤$ سم

نصحه
معلم اول رياضيات



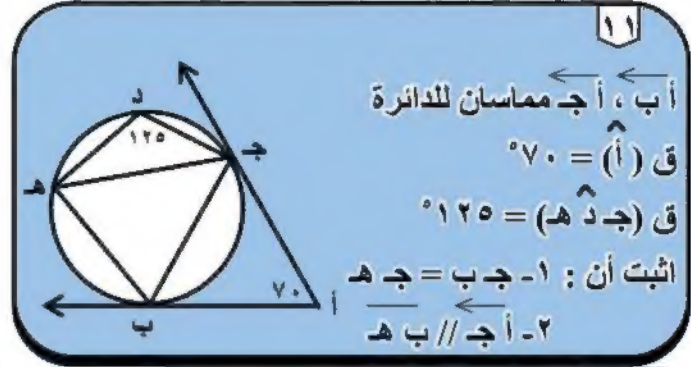
الحل

في Δ أ ب ج : ∴ $أ ب = أ ج$
 ∴ ق (أ ب ج) = ق (أ ج ب) — (١)
 في Δ أ ب د : ∴ $د أ = د ب$ لأنهما قطعتان مماستان
 ∴ ق (د أ ب) = ق (د ب أ) — (٢)
 ∴ ق (د أ ب) المماسية = ق (أ ج ب) المحيطة — (٣)
 من ١ ، ٢ ، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن :
 ق (ب أ ج) = ق (د أ ب)
 ∴ ج مماس للدائرة المارة ب رؤوس المثلث أ ب د



الحل

∴ $أ ب = أ ج$ قطعتان مماستان للدائرة الصغرى
 ∴ $أ ب = ١٥$ سم ∴ $١٥ = ٣ - ٢$ ∴ $١٨ = ٢$ سم
 ∴ $٩ = ٢$
 ∴ $أ ب = أ د$ قطعتان مماستان للدائرة الكبرى
 ∴ $١٥ = أ د$ ∴ $١٥ = ٢ - ص$
 ∴ $١٧ = ص$



الحل

∴ الشكل د ج ب هـ رباعي دائري
 ∴ ق (ج ب هـ) = $١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥^\circ$ — (١)
 ∴ أ ج ، أ ب قطعتان مماستان
 ∴ ق (أ ج ب) = ق (أ ب ج) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢} = ٥٥^\circ$
 ∴ ق (ب هـ ج) المحيطة = ق (أ ج ب) المماسية = ٥٥° — (٢)
 من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (ج ب هـ) = ق (ب هـ ج)
 ∴ Δ ج ب هـ متساوي الساقين ∴ ج ب = ج هـ أولا
 ∴ ق (أ ج ب) = ق (ج ب هـ) = ٥٥°
 وهما متبادلتان ∴ أ ج // ب هـ